ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVII

ANNÉE 1938, FASCICULE I

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.
SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION: FRANÇOIS LEJA, CRACOVIE, PL. JABŁONOWSKICH 3

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1938
INSTYTUT MATEMATYCZNY U. J., UL. GOŁĘBIA 20

Avis

Depuis l'année 1938, chaque tome des Annales de la Société Polon. de Mathématique paraît en deux fascicules correspondants aux semestres de l'année.

La Société offre gratuitement 100 tirages à part aux auteurs des Annales.

Les manuscrits doivent être envoyés à l'une des adresses:

S. Zaremba, Kraków (Pologne), ul. Żytnia 6,
F. Leja, Kraków (Pologne), pl. Jabłonowskich 3.

Pour ce qui concerne l'achat et l'échange de ces Annales s'adresser à:

l'Administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique
Kraków (Pologne), ul. Gołębia 20.

Table des matières

du t. XVII, fascicule I

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVII

ANNÉE 1938

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.
SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION: FRANÇOIS LEJA, CRACOVIE, PL. JABŁONOWSKICH 3

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1938
INSTYTUT MATEMATYCZNY U. J., UL. GOŁĘBIA 20

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZ. J. FILIPOWSKIEGO

SUR UNE FAMILLE DE FONCTIONS HARMONIQUES LIÉES À UNE FONCTION DONNÉE DANS UN INTERVALLE

Par FRANCISZEK LEJA, Kraków

Soit $f(x)$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle $I=\langle a,b\rangle$, λ un paramètre réel et n un nombre naturel fixe. Étant donnés $n+1$ nombres différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$, appartenant à I, que nous désignerons aussi par une seule lettre ζ

$$(1) \qquad \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}=\zeta,$$

considérons les $n+1$ polynômes de LAGRANGE correspondant aux points (1):

$$L_n^{(j)}(x,\zeta)=\frac{x-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0}\cdots\frac{x-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}}\cdot\frac{x-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}}\cdots\frac{x-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}$$

et formons la somme

$$(2) \qquad F_n(x,\lambda,\zeta)=\sum_{j=0}^{n} e^{n\lambda f(\zeta_j)}\cdot|L_n^{(j)}(x,\zeta)|$$

se réduisant pour $x=\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ à

$$e^{n\lambda f(x)}$$

et ayant une valeur positive pour chaque valeur réelle ou complexe de la variable x.

Lorsque les points (1) varient arbitrairement dans l'intervalle I la somme $F_n(x,\lambda,\zeta)$ reste bornée inférieurement pour chaque x, λ et n fixe. Posons

$$(3) \qquad F_n(x,\lambda)=\text{borne inf}_{(\zeta\in I)}\{F_n(x,\lambda,\zeta)\}$$

et observons qu'on a toujours $F_n(x,\lambda)>0$, donc la formule

$$(4) \qquad f_n(x,\lambda)=1/n\log F_n(x,\lambda), \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\dots,$$

fait correspondre à chaque λ réel une suite infinie de fonctions réelles, définies dans le plan entier de la variable complexe x.

Dans le travail: Sur certaines propriétés de la formule d'interpolation de LAGRANGE, inséré dans ce journal [1]), j'ai démontré que:

I. *La suite* (4) *tend pour chaque x et λ fixe vers une limite finie*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,\lambda)=f(x,\lambda), \tag{5}$$

la fonction limite $f(x,0)$, correspondant à $\lambda=0$, étant identique à la fonction de Green du domaine infini extérieur à I ayant son pôle au point $x=\infty$.

II. *Pour chaque valeur fixe de x appartenant à l'intervalle I l'expression*

$$1/\lambda\, f(x,\lambda) \tag{6}$$

reste bornée au voisinage de $\lambda=0$.

Les fonctions de la variable complexe x de la famille

$$f(x,\lambda), \qquad -\infty<\lambda<\infty,$$

dépendent manifestement dans le cas $\lambda\neq 0$ de la fonction donnée $f(x)$. On sait qu'elles sont toutes harmoniques et régulières dans le plan entier de x à l'exception des points de l'intervalle I au plus [2]).

Le but de ce travail est de préciser la proposition II et d'en tirer une méthode d'approximation des fonctions continues. Nous allons notamment démontrer le théorème suivant:

III. *L'expression* (6) *tend dans l'intervalle I vers la fonction donnée $f(x)$ lorsque λ tend vers zero*

$$\lim_{\lambda\to 0} 1/\lambda\, f(x,\lambda)=f(x),$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle I.

---

[1]) t. XVI, 1938, p. 112—125.

[2]) Bulletin de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lettres, Sc. Mathém., Kraków, 1936, p. 79—92.

Démonstration. Désignons, comme dans le travail précédent [3]), par $\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)$ pour $j=0,1,\ldots,n$ le polynôme

$$\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)=L_n^{(j)}(x,\zeta)\cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)} \tag{7}$$

et soit

$$\Phi_n(x,\lambda)=\underset{(\zeta\in I)}{\text{borne inf}}\,\{\max_{(j)}|\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)|\} \tag{8}$$

la borne inférieure du plus grand des modules $\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)$, $j=0,1,\ldots,n$, lorsque, x, λ et n étant fixes, les points (1) varient arbitrairement dans l'intervalle I. On sait d'après ce travail que, quels que soient x et λ, il existe la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Phi_n(x,\lambda)}=\Phi(x,\lambda) \tag{9}$$

et qu'on a identiquement

$$f(x,\lambda)=\log\Phi(x,\lambda). \tag{10}$$

D'autre part, on sait que, si x appartient à l'intervalle I, on a, quel que soit $\lambda\gtreqless 0$, l'inégalité

$$\Phi(x,\lambda)\leqslant e^{\lambda f(x)}. \tag{11}$$

Je dis qu'à chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre deux nombres positifs λ_1 et λ_2 tels que, quel que soit x appartenant à I, on ait les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}&\Phi(x,\lambda)\geqslant e^{\lambda[f(x)-\varepsilon]} &&\text{si}\quad 0<\lambda<\lambda_1,\\ &\Phi(x,\lambda)\geqslant e^{\lambda[f(x)+\varepsilon]} &&\text{si}\quad -\lambda_2<\lambda<0.\end{aligned} \tag{12}$$

En effet, soit η un nombre positif quelconque. Puisque la fonction $e^{f(x)}$ est continue dans I il existe d'après le théorème connu de Weierstrass un polynôme $P_k(x)$ et un nombre $\delta>0$ tels qu'on ait dans l'intervalle I

$$e^{\varrho f(x)-\eta}<P_k(x)<e^{\varrho f(x)+\eta} \tag{13}$$

pour chaque valeur de ϱ remplissant la condition

$$1\leqq\varrho<1+\delta. \tag{14}$$

---

[3]) Ce journal t. XVI, 1938, p. 114. Je suppose que ce travail est connu du lecteur.

Soit k le degré du polynôme $P_k(x)$. Posons

$$\lambda_1 = 1/k$$

et soit λ un nombre fixe quelconque satisfaisant aux inégalités

$$0 < \lambda < \lambda_1.$$

Il est clair qu'on peut lui faire correspondre deux nombres naturels p et q et un nombre ϱ appartenant à l'intervalle (14) tels qu'on ait

$$\lambda = \varrho \cdot p/q. \tag{15}$$

Observons qu'on a l'inégalité

$$p/q < 1/k \tag{16}$$

car p/q est plus petit que λ et λ est plus petit que $1/k$.

Soit n un nombre naturel fixe quelconque de la forme

$$n = \nu \cdot q/p, \quad \text{où} \quad \nu = p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots \tag{17}$$

et x un nombre appartenant à l'intervalle I. Faisons correspondre à ces deux nombres et au nombre λ considéré plus haut $n+1$ points

$$\{y_0, y_1, \ldots, y_n\} = y$$

de l'intervalle I tels qu'on ait

$$\Phi_n(x,\lambda) \leqq \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,y)| < 2\Phi_n(x,\lambda) \tag{18}$$

ce qui est toujours possible d'après la formule (8) car on a toujours $\Phi_n(x,\lambda) > 0$. Formons maintenant les polynômes de Lagrange $L_n^{(j)}(x,y)$, $j=0,1,\ldots,n$, correspondant aux points $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et observons que leur degré n est, d'après (16) et (17), plus grand que $k\nu$. Puisque le polynôme

$$[P_k(x)]^\nu$$

est du degré $k\nu$, on a d'après la formule d'interpolation de Lagrange identiquement

$$[P_k(x)]^\nu = \sum_{j=0}^{n} [P_k(y_j)]^\nu \cdot L_n^{(j)}(x,y),$$

d'où résulte, d'après (13), l'inégalité

$$e^{\nu\varrho f(x)-\nu\eta} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{\nu\varrho f(y_j)+\nu\eta} \cdot |L_n^{(j)}(x,y)|.$$

Mais on a, d'après (15) et (17), $\nu\varrho = n\lambda$ et, comme

$$L_n^{(j)}(x,y)\, e^{n\lambda f(y_j)} = \Phi_n^{(j)}(x,\lambda,y),$$

on voit que

$$e^{n\lambda f(x)-n\lambda\eta/\varrho} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{n\lambda\eta/\varrho} \cdot |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,y)|$$

et par suite on a d'après (18)

$$e^{n\lambda f(x)-n\lambda\eta/\varrho} \leqq 2(n+1)\, e^{n\lambda\eta/\varrho} \cdot \Phi_n(x,\lambda),$$

ce qui entraîne immédiatement l'inégalité

$$\sqrt[n]{\Phi_n(x,\lambda)} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{2(n+1)}} \cdot e^{\lambda[f(x)-2\eta/\varrho]}.$$

Faisons maintenant tendre le nombre n vers l'infini en posant $n = \nu \cdot q/p$ et $\nu = p, 2p, 3p, \ldots$ En tenant compte de la formule (9) on déduit de la dernière inégalité la suivante

$$\Phi(x,\lambda) \geqq e^{\lambda[f(x)-2\eta/\varrho]}$$

et, puisque $\varrho \geqq 1$, on voit que, si $0 < \lambda < \lambda_1$, on a

$$\Phi(x,\lambda) \geqq e^{\lambda[f(x)-2\eta]}.$$

La première des inégalités (12) est donc démontrée car on peut poser $2\eta = \varepsilon$.

Pour établir la seconde des inégalités (12) considérons un nombre positif quelconque η et faisons correspondre à la fonction $e^{-f(x)}$ un polynôme $Q_m(x)$ et un nombre $\delta > 0$ tels qu'on ait dans l'intervalle I

$$e^{-\varrho f(x)-\eta} < Q_m(x) < e^{-\varrho f(x)+\eta} \tag{19}$$

pour chaque valeur de ϱ remplissant la condition $1 \leqq \varrho < 1+\delta$. Soit m le degré du polynôme $Q_m(x)$. Posons $\lambda_2 = 1/m$ et soit λ un nombre fixe quelconque appartenant à l'intervalle $-\lambda_2 < \lambda < 0$. On peut lui donner la forme

$$\lambda = -\varrho \cdot p/q,$$

où ϱ appartient à l'intervalle $\langle 1, 1+\delta \rangle$ et où p et q sont des nombres naturels remplissant la condition $p/q < 1/m$.

Soit n un nombre naturel de la forme (17) et x un nombre appartenant à l'intervalle I. Faisons correspondre à ces deux nombres et à $\lambda = -\varrho \cdot p/q$, $n+1$ points $y_0, y_1, \ldots, y_n$ de l'intervalle I tels que les inégalités (18) soient satisfaites. Puisque $n = \nu \cdot q/p > \nu m$, le degré du polynôme

$$[Q_m(x)]^\nu$$

est plus petit que n, et par suite on a identiquement

$$[Q_m(x)]^\nu = \sum_{j=0}^{n} [Q_m(y_j)]^\nu \cdot L_n^{(j)}(x, y),$$

d'où résulte, d'après (19), l'inégalité

$$e^{-\varrho\nu f(x) - \nu\eta} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{-\varrho\nu f(y_j) + \nu\eta} \cdot |L_n^{(j)}(x, y)|$$

et comme $n\lambda = -\varrho\nu$ on en déduit d'après (18) l'inégalité suivante:

$$e^{n\lambda f(x) + n\lambda\eta/\varrho} \leqq 2(n+1)\, e^{-n\lambda\,\eta/\varrho} \cdot \Phi_n(x, \lambda).$$

Il en résulte comme plus haut que, si $-\lambda_2 < \lambda < 0$, on a

$$\Phi(x, \lambda) \geqq e^{\lambda[f(x) + 2\eta/\varrho]} \geqq e^{\lambda[f(x) + 2\eta]}$$

donc la seconde des inégalités (12) est établie car on peut poser $2\eta = \varepsilon$.

Des inégalités (11) et (12) résulte la conclusion suivante: À chaque nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre positif $\lambda_0 = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ tel qu'on ait

$$f(x) - \varepsilon \leqq 1/\lambda \log \Phi(x, \lambda) \leqq f(x) \qquad \text{si} \qquad 0 < \lambda < \lambda_0,$$
$$f(x) \leqq 1/\lambda \log \Phi(x, \lambda) \leqq f(x) + \varepsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < -\lambda < \lambda_0,$$

et par suite notre théorème est démontré car on a identiquement $f(x, \lambda) = \log \Phi(x, \lambda)$.

Considérons les fonctions $F_n(x, \lambda)$ définies par la formule (3) et correspondant à la fonction donnée $f(x)$. D'après les théorèmes I et II il existe dans l'intervalle I la limite réitérée

$$\lim_{\lambda \to 0} \{\lim_{n \to \infty} 1/n\lambda \log F_n(x, \lambda)\} \tag{20}$$

et elle est égale à la fonction $f(x)$. En particulier on a dans l'intervalle I

$$\lim_{m \to \infty} \{\lim_{n \to \infty} m/n \log F_n(x, 1/m)\} = f(x). \tag{21}$$

Cette formule permet d'approcher une fonction continue quelconque $f(x)$, définie dans un intervalle I, par des valeurs frontières des fonctions harmoniques

$$\lim_{n\to\infty} m/n \log F_n(x, 1/m) = mf(x, 1/m), \qquad m=1,2,\ldots,$$

régulières dans le plan entier à l'exception des points de l'intervalle I au plus.

Remarquons que si λ tend vers zéro par des valeurs d'un même signe la limite (20) existe aussi à l'extérieur de l'intervalle I, mais, dans ce domaine, elle est partout infinie.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS ESSENTIELLES

Par KAROL BORSUK, Warszawa

1. Une transformation continue f d'un espace[1]) X en un autre espace Y est dite, d'après M. H. HOPF[2]), *essentielle*, lorsque pour toute famille de fonctions $\{f_t\}\subset Y^X$ [3]) telle que $f_0=f$ on a $Y=f_1(X)$. En généralisant cette notion, nous allons introduire la définition suivante:

Définition 1. *Un sous-ensemble B de Y est recouvert par l'image de la fonction f d'une manière essentielle*, lorsqu'il existe un entourage[4]) U de l'ensemble $f^{-1}(B)$ tel que pour toute famille de fonctions $\{f_t\}\subset Y^X$ satisfaisant aux conditions:

(1) $$f_0=f,$$

(2) $$f_t(X-U)\subset Y-B \quad \textit{pour tout} \quad t\in\langle 0,1\rangle$$ [5])

on ait

(3) $$B\subset f_1(X).$$

---

[1]) Tous les espaces à considérer seront supposés métriques.

[2]) Voir H. Hopf, *Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen*, Recueil Math. de Moscou 1930, p. 53. Voir aussi P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie* I, Berlin 1935, p. 492.

[3]) Y^X désigne la classe de toutes les transformations continues des l'espace X en sous-ensembles de l'espace Y. Par une *famille* $\{f_t\}\subset Y^X$ j'entends dans cette Note une fonction $f_t(x)$ de deux variables $x\in X$ et $0\leqslant t\leqslant 1$ telle que pour toute valeur de t on a $f_t\in Y^X$ et pour tout $\varepsilon>0$ il existe un $\eta>0$ tel que l'inégalité $|t-t'|<\eta$ entraîne l'inégalité $\varrho[f_t(x),f_{t'}(x)]<\varepsilon$ pour tout $x\in X$.

[4]) Par *entourage* (d'un point ou d'un ensemble) j'entends dans cette Note toujours un entourage *ouvert*.

[5]) $\langle\alpha,\beta\rangle$ désigne l'ensemble des nombres réels t assujettis à l'inégalité $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

L'entourage U de B constituant aussi un entourage pour tout sous-ensemble de B, on en conclut:

(4) *Chaque sous-ensemble d'un ensemble recouvert par l'image de f d'une manière essentielle est lui-même recouvert par l'image de f d'une manière essentielle.*

2. Remarquons qu'on peut remplacer dans la définition d'un recouvrement essentiel la condition (2) par la condition suivante:

(2') $$f_t(x)=f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in X-U \quad \text{et} \quad t\in\langle 0,1\rangle.$$

Afin de prouver ceci, il suffit de montrer que l'existence d'une famille de fonctions $\{f_t\}\subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) et d'un point b tel que

(5) $$b\in B-f_1(X)$$

entraîne l'existence d'une famille $\{f_t^*\}\subset Y^X$ satisfaisant aux conditions

(1*) $f_0^*=f$,

(2*) $f_t^*(x)=f(x)$ *pour tout* $x\in X-U$ *et* $t\in\langle 0,1\rangle$,

(5*) $b\in B-f_1^*(X)$.

D'après (2) et (5) il existe pour tout $x\in X-U$ un entourage G_x tel que $b\in B-f_t(G_x)$ pour tout $t\in\langle 0,1\rangle$. Or, l'ensemble $G=\sum\limits_{x\in X-U} G_x$ est un entourage de $X-U$ tel que

(6) $$b\in B-f_t(G) \quad \textit{pour tout} \quad t\in\langle 0,1\rangle.$$

Ceci établi, considérons dans le produit cartésien $X\times\langle 0,1\rangle$ les ensembles $(X-U)\times\langle 0,1\rangle$ et $(X-G)\times\langle 0,1\rangle$. Ces ensembles étant disjoints et fermés, la fonction réelle $\lambda(x,t)$ définie dans l'ensemble $T=(X-U)\times\langle 0,1\rangle+(X-G)\times\langle 0,1\rangle+X\times(0)$ par les formules

(7) $$\lambda(x,t)=0 \quad \textit{pour tout} \quad (x,t)\in(X-U)\times\langle 0,1\rangle,$$

(8) $$\lambda(x,t)=t \quad \textit{pour tout} \quad (x,t)\in(X-G)\times\langle 0,1\rangle,$$

(9) $$\lambda(x,0)=0 \quad \textit{pour tout} \quad x\in X$$

est continue. L'ensemble T étant fermé, il existe un prolongement continu de $\lambda(x,t)$ (que nous allons désigner aussi par $\lambda(x,t)$) sur l'espace $X\times\langle 0,1\rangle$ tout entier avec les valeurs appartenant à $\langle 0,1\rangle$ tel que les fonctions $\lambda_t\,\epsilon\,\langle 0,1\rangle^X$ définies par la formule $\lambda_t(x)=\lambda(x,t)$ pour tout $x\,\epsilon\,X$ constituent une famille $\subset\langle 0,1\rangle^X$ [6]). Or en posant

$$f_t^*(x)=f_{\lambda(x,t)}(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\,\epsilon\,X \quad \textit{et} \quad t\,\epsilon\,\langle 0,1\rangle,$$

on obtient une famille $\{f_t^*\}\subset Y^X$. En tenant compte de (9), on a

$$f_0^*(x)=f_{\lambda(x,0)}(x)=f_0(x)=f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\,\epsilon\,X,$$

c. à d. la condition (1*) est remplie. En outre, d'après (7) on a pour tout $x\,\epsilon\,X-U$ et $t\,\epsilon\,\langle 0,1\rangle$ l'égalité $f_t^*(x)=f_{\lambda(x,t)}(x)=f_0(x)=f(x)$, c. à d. la condition (2*) est remplie. On a enfin, d'après (8), (5) et (6): $f_1^*(X-G)=f_1(X-G)\subset f_1(X)\subset Y-(b)$ et $f_1^*(G)\subset Y-(b)$, d'où $f_1^*(X)=f_1^*(X-G)+f_1^*(G)\subset Y-(b)$, c. à d. la condition (5*) est remplie.

3. On a en outre la proposition suivante:

(10) *Si l'ensemble $B\subset Y$ est recouvert d'une manière essentielle par l'image d'une fonction continue f transformant un espace X en un sous-ensemble de Y et si X_0 est un sous-ensemble fermé de X contenant $f^{-1}(B)$ dans son intérieur, alors B est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f considerée uniquement dans l'ensemble X_0.*

B étant recouvert d'une manière essentielle par l'image de f, il existe, d'après le N⁰ précédent, un entourage U de $f^{-1}(B)$ dans X tel que chaque famille $\{f_t\}\subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2') satisfait aussi à la condition (3). En posant maintenant $U_0=(X_0-\overline{X-X_0})\cdot U$, considérons une famille $\{f_t'\}\subset Y^{X_0}$ satisfaisant aux conditions: $f_0'=f$ et $f_t'(x)=f(x)$ pour tout $x\,\epsilon\,X_0-U_0$ et $t\,\epsilon\,\langle 0,1\rangle$. Or, en posant pour tout $t\,\epsilon\,\langle 0,1\rangle$

$$f_t(x)=f_t'(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\,\epsilon\,X_0$$
$$f_t(x)=f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\,\epsilon\,X-X_0$$

---

[6]) Voir ma Note *Sur les prolongements des transformations continues*, Fund. Math. 18 (1936), p. 103.

on obtient évidemment une famille $\{f_t\} \subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2'). Il vient $B \subset f_1(X) = f_1(X_0) + f(X - X_0)$. Or, en tenant compte de l'inclusion $f^{-1}(B) \subset X_0$, on en conclut que $B \cdot f(X - X_0) = 0$, c. à d. $B \subset f_1(X_0)$. La proposition (10) est ainsi démontrée.

4. ***Exemple 1.*** Soit X un sous-ensemble compact de l'espace euclidien n-dimensionnel $R_n = Y$. Dans ces conditions l'ensemble $B = X - \overline{R_n - X}$ (c. à d. l'intérieur de X par rapport à l'espace R_n) est recouvert d'une manière essentielle par l'imgae de la fonction $f \epsilon Y^X$ transformant X par l'identité.

Ceci est une conséquence immédiate du N° **2** et du théorème [7]) d'après lequel pour toute fonction continue $\varphi \epsilon R_n^X$ transformant la frontière $X - B$ de X par l'identité, l'ensemble X est contenu dans $\varphi(X)$.

5. ***Exemple 2.*** Soient: X — la somme de deux intervalles $\langle -6, -1 \rangle$ et $\langle 1, 6 \rangle$; Y — l'ensemble de tous les nombres réels; B — l'intervalle $\langle -2, 2 \rangle$; f — la fonction définie par les formules $f(x) = x + 2$ pour tout $x \epsilon \langle -6, -1 \rangle$ et $f(x) = x - 2$ pour tout $x \epsilon \langle 1, 6 \rangle$.

On voit sans peine que tout point $b \epsilon B$ est recouvert par l'image de la fonction f d'une manière essentielle. Il n'en est pas ainsi pour l'ensemble B tout entier, car en posant

$$
\begin{array}{llll}
f_t(x) = x + 2 & \text{pour tout } x \epsilon \langle -6, -4 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle, \\
f_t(x) = x + 2 + t(-4 - x) & \text{pour tout } x \epsilon \langle -4, -1 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle, \\
f_t(x) = x - 2 + t(4 - x) & \text{pour tout } x \epsilon \langle 1, 4 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle, \\
f_t(x) = x - 2 & \text{pour tout } x \epsilon \langle 4, 6 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle
\end{array}
$$

on obtient, comme on vérifie sans peine, une famille $\{f_t\} \subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) pour tout entourage U de l'ensemble $f^{-1}(B) = \langle -4, -1 \rangle + \langle 1, 4 \rangle$, tandis que la condition (3) n'est pas remplie, car $f_1(x) \neq 0$ pour tout $x \epsilon X$, c. à d. $0 \epsilon B - f_1(X)$.

6. ***Exemple 3.*** En posant $X = Y = R_n$, où R_n désigne l'espace euclidien n-dimensionnel, envisageons une transformation $f \epsilon Y^X$ dont toutes les trauches (c. à d. les ensembles de la forme

---

[7]) Voir ma Note *Sur les rétractes*, Fund. Math. 17 (1931), p. 161.

$f^{-1}(y)$, où $y \epsilon Y$) sont de diamètre inférieur à une constante positive ε. Nous allons démontrer dans ces conditions que *chaque ensemble compact $B \subset f(R_n)$ est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f.*

L'ensemble $A = f^{-1}(B)$ étant compact [8]), il existe dans R_n une sphère n-dimensionnelle Q_n ayant 0 pour centre et dont le rayon est si grand que $A \subset Q_n$ et que la distance de chaque point de la surface $S_{n-1} = Q_n \cdot \overline{R_n - Q_n}$ de la sphère Q_n à l'ensemble B est $\geqslant \varepsilon$. Afin de prouver que B est recouvert d'une manière essentielle par l'image de f, il suffit de montrer que pour toute transformation $f' \epsilon R_n^{Q_n}$ coïncidant avec f dans la surface S_{n-1}, on a $B = f(A) \subset f'(Q_n)$. Si l'on suppose le contraire, il existe un $a \epsilon A$ tel que $f(a) \neq f'(x)$ pour tout $x \epsilon Q_n$. Or, en faisant correspondre à tout $x \epsilon Q_n$ le point $\varphi'_a(x) \epsilon S_{n-1}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{f(a)f'(x)}$ et $\overrightarrow{0\varphi'_a(x)}$ soient parallèles, on obtient une fonction continue transformant Q_n en S_{n-1}. Par conséquent, la fonction φ'_a, considerée uniquement dans S_{n-1}, transforme S_{n-1} en soi d'une manière inessentielle. Mais c'est impossible, car φ'_a coïncide dans S_{n-1} avec la fonction $\varphi_a \epsilon S_{n-1}^{S_{n-1}}$ définie par la condition du parallèlisme des vecteurs $\overrightarrow{0\varphi_a(x)}$ et $\overrightarrow{f(a)f(x)}$ et cette dernière fonction transforme S_{n-1} en soi d'une manière essentielle [9]).

7. Soit V une variété m-dimensionnelle [10]) contenue dans une variété n-dimensionnelle W. Soit, en outre, Q_k la sphère euclidienne k-dimensionnelle dont le centre est 0 et le rayon 1.

Définition 2. *La varieté V est située dans la varieté W dans une position localement regulière*, lorsqu'il existe pour tout $p \epsilon V$ une homéomorphie h transformant le produit $Q_m \times Q_{n-m}$ en un sous-ensemble Z de W de façon que $h(0,0) = p$ et $h^{-1}(V \cdot Z) = Q_m \times (0)$.

---

[8]) Voir ma Note *Über stetige Abbildungen der euklidischen Räume*, Fund. Math. 21 (1933), p. 241.

[9]) l. c. p. 238.

[10]) On entend par *varieté n-dimensionnelle* un espace connexe qui est dans chacun de ses points localement homéomorphe à l'espace euclidien n-dimensionnel R_n.

Exemples: 1) D'après une remarque de M. H. Whitney, il résulte d'un théorème de M. T. Ważewski[11]) que chaque variété différentielle contenue dans l'espace euclidien n-dimensionnel y est située dans une position localement régulière.

2) En tenant compte du théorème[12]), d'après lequel toute homéomorphie transformant un arc simple contenu dans le plan euclidien R_2 en un autre arc simple situé dans R_2 se laisse étendre à une homéomorphie transformant R_2 en soi, on conclut que chaque courbe simple fermée contenue dans une surface (c. à d. dans une variété à deux dimensions) y est située dans une position localement régulière.

8. Le but principal de ce travail est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit W une variété n-dimensionnelle et V une variété compacte m-dimensionnelle située dans W dans une position localement régulière et soit M un espace arbitrairement donné. Dans ces conditions, chaque fonction $f \epsilon W^M$, dont l'image recouvre V d'une manière essentielle, transforme l'ensemble $f^{-1}(V)$ en V d'une manière essentielle.*

9. Le théorème 1 conduit au corollaire suivant:

Corollaire. *Soit f une fonction continue transformant l'espace euclidien n-dimensionnel R_n en soi et dont les tranches sont de diamètre inférieur à une constante positive ε. Dans ces conditions aucune variété compacte située dans R_n dans une position localement régulière n'est un retracte de $f(R_n)$.*

Soit, en effet, $V \subset f(R_n)$ une variété compacte située dans R_n dans une position localement régulière. En tenant compte de l'exemple du N° **6** on conclut que $f^{-1}(V)$ est un ensemble compact et que V est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction r rétractant $f(R_n)$ en V. En désignant pour tout $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \epsilon R_n$ et tout λ réel par $\lambda \cdot p$ le point $(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$, posons $\varphi_t(p) = r\{f[(1-t)p]\}$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(V)$ et $t \epsilon \langle 0,1 \rangle$. Les fonc-

---

[11]) H. Whitney, *The Imbedding of Manifolds in Families of Analytic Manifolds*, Annals of Math. 37 (1936), p. 863-878. T. Ważewski, *Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues*, Compositio Math. 2 (1935), p. 63-68.

[12]) Voir L. Antoine, *Thèse*, Strasbourg 1921.

tions φ_t ainsi définies constituent une famille $\{\varphi_t\}) \subset V^{f^{-1}(V)}$ telle qu'on a: $\varphi_0(p)=rf(p)=f(p)$ et $\varphi_1(p)=rf(0)=\text{const.}$ pour tout $p \in f^{-1}(A)$, ce qui est impossible puisque, d'après le théorème 1, la fonction f transforme $f^{-1}(V)$ en V d'une manière essentielle.

10. Le théorème 1 est une conséquence facile du théorème suivant:

Théorème 2. *Soit V une variété compacte m-dimensionnelle située dans une variété n-dimensionnelle W dans une position localement régulière et soit f une transformation continue d'un espace M en W. Dans ces conditions il existe pour toute famille de fonctions $\{\varphi_t\} \subset V^{f^{-1}(V)}$ satisfaisant à l'égalité $\varphi_0(p)=f(p)$ pour tout $p \in f^{-1}(V)$, une famille $\{f_t\} \subset W^M$ telle que f_0 coïncide avec f et que pour tout $t \in \langle 0,1 \rangle$ la fonction f_t est un prolongement de φ_t et $f_t^{-1}(V)=f^{-1}(V)$.*

En effet, pour déduire le théorème 1 du théorème 2, remarquons que si f transforme $f^{-1}(V)$ en V d'une manière inessentielle, alors il existe une famille $\{\varphi_t\} \subset V^{f^{-1}(V)}$ telle que $\varphi_0(p)=f(p)$ pour tout $p \in f^{-1}(V)$ et $\varphi_1[f^{-1}(V)] \neq V$. Or, d'après le théorème 2, il existe une famille $\{f_t\} \subset W^M$ telle que f_0 coïncide avec f et que pour tout $t \in \langle 0,1 \rangle$ la fonction f_t est un prolongement de φ_t satisfaisant à la condition $f_t^{-1}(V)=f^{-1}(V)$. Soit maintenant U un entourage arbitrairement donné de $f^{-1}(V)$ dans l'espace M. Les ensembles $f_t(M-U)$ et V étant disjoints, les conditions (1) et (2) de la définition 1 sont remplies. Il n'en pas ainsi pour la condition (3), car l'ensemble $f_1(M)$ est la somme de deux ensembles $f_1[M-f^{-1}(V)]$ et $f_1[f^{-1}(V)]=\varphi_1[f^{-1}(V)]$ dont le premier est disjoint avec V et le deuxième est $\subset V$ et $\neq V$. Ceci prouve que l'ensemble V n'est pas recouvert par f d'une manière essentielle.

11. Par une *déformation d'un espace M dans soi* on entend une famille $\{f_t\} \subset M^M$ telle que $f_0(p)=p$ pour tout $p \in M$.

Soit A un sous-ensemble de M et $\{\varphi_t\}$ une déformation continue de A dans soi. Une déformation $\{f_t\}$ de M dans soi sera dite *parallèle à la déformation* $\{\varphi_t\}$, lorsque $f_t^{-1}(A)=A$ et $f_t(p)=\varphi_t(p)$ pour tout $t \in \langle 0,1 \rangle$ et $p \in A$. En rapprochant cette notion du théorème 2, on parvient au corollaire suivant:

Corollaire. *Etant donnée une variété compacte V située dans une autre variété W dans une position localement régulière, il existe pour toute déformation de V dans soi une déformation parallèle de W dans soi.*

12. Les deux exemples qui suivent montrent que le dernier corollaire (et par suite aussi le théorème 2) cesse d'être vrai lorsqu'on supprime l'hypothèse que la position de la variété V dans la variété W soit localement régulière.

Exemple 4. Les points de la forme $(x,y,z,0)$ constituent dans l'espace euclidien 4-dimensionnel R_4 un ensemble qui peut être identifié avec l'espace euclidien 3-dimensionnel R_3. Soit Ω une courbe simple fermée $\subset R_3$ polygonale et formant dans R_3 un noeud. Or il existe dans $R_3-\Omega$ des parcours fermés dont le coefficient d'enlacement avec Ω s'annule et qui, malgré cela, sont non homotopes à zéro dans $R_3-\Omega$. En posant maintenant $a=(0,0,0,1)$ et $a^*=(0,0,0,-1)$, désignons par A la somme de tous les segments rectilignes $\overline{ap}$ et $\overline{a^*p}$, le point p parcourant la courbe Ω. On voit aisément que A est un polyèdre homéomorphe à la surface sphérique de dimension 2.

Ceci établi, envisageons une déformation $\{\varphi_t\}$ de A dans soi par laquelle le point a est transformé en un point $\varphi_1(a)\in A-(a)-(a^*)$. Nous allons prouver qu'il n'existe aucune déformation de R_4 dans soi parallèle à $\{\varphi_t\}$. Dans ce but remarquons que pour tout entourage U de a (dans R_4) il existe dans $U-A$ des parcours fermés qui ne sont pas homotopes à zéro dans R_4-A, quoique leur coefficient d'enlacement avec A s'annule. C'est une conséquence facile de trois propositions suivantes, dont la démonstration ne présente aucune difficulté: 1° Chaque parcours fermé situé dans $R_3-\Omega$ est homotope dans R_4-A à un parcours fermé situé dans U; 2° Le coefficient d'en. lacemant (dans R_3) d'un parcours fermé situé dans $R_3-\Omega$ avec Ω coïncide avec le coefficient d'enlacement de ce parcours avec la surface A (dans R_4); 3° Pour les parcours fermés situés dans $R_3-\Omega$ l'homotopie à zéro dans $R_3-\Omega$ et l'homotopie à zéro dans R_4-A sont équivalentes. Remarquons enfin qu'il existe un entourage U' du point $\varphi_1(a)$ (dans R_4) tel que chaque parcours fermé situé dans $U'-A$, dont le coeffiient d'enclacement avec A s'annule, est homotope à zero dans R_4-A.

Supposons, à présent, qu'il existe une déformation $\{f_t\}$ de l'espace R_4 dans soi parallèle à la déformation $\{\varphi_t\}$. En fixent l'entourage U', on peut choisir l'entourage U de manière qu'on ait $f_1(U)\subset U'$. Or, la déformation $\{f_t\}$ transforme tout parcours fermé Λ situé dans $U-A$ en un parcours fermé Λ' situé dans $U'-A$ et homotope à Λ dans R_4-A. En choisissent le parcours Λ de manière que son coefficient d'enlacement avec A s'annule et qu'il ne soit pas homotope à zéro dans R_4-A, on parvient ainsi à un parcours fermé Λ' situé dans $U'-A$ dont le coefficient d'enlacement avec A s'annule et qui n'est pas homotope à zéro dans R_4-A. Or ceci contredit la définition d'entourage U'.

Il résulte en particulier de cet exemple qu'il existe dans R_4 des variétés polyèdriques dont la position n'est pas localement régulière.

13. ***Exemple 5.*** En utilisant l'exemple bien connu dû à M. L. Antoine[11]) d'une courbe simple fermée dans R_3 dont l'homéomorphie avec une circonférence ne se laisse prolonger sur aucun entourage, on voit aisément que cette courbe constitue un exemple d'une variété dans R_3 pour laquelle la thèse du corollaire du N⁰ **11** n'est plus valable. D'une façon pareille, en utilisant un exemple dû à M. J. W. Alexander[13]), on voit qu'il existe dans R_3 des surfaces (c. à d. des variétés de dimension 2) dont la position dans R_3 n'est pas localement régulière.

Problème. *Soit A une variété homéomorphe à une surface sphérique $(n-1)$-dimensionnelle située dans R_n dans une position localement régulière. Existe-t-il une homéomorphie transformant R_n en soi de manière que A soit transformé en une surface sphérique?*

14. L'exemple du N⁰ **12** montre que la thèse du théorème 2 cesse d'être vraie lorsqu'on supprime l'hypothèse que la variété V est située dans la variété W dans une position localement régulière. La question s'impose si cette dernière hypothèse est indispensable aussi dans le théorème 1. Nous ne savons la resondre que dans un cas special, par la démonstation du théorème suivant:

Théorème 3. *Si Ω est une courbe simple fermée située dans une variété polyédrique*[14]) *(compacte ou non) W et si f est une fonction continue transformant un espace M en W de façon*

---

[13]) J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 8-10.

[14]) c. à d. dans une variété admettant une décomposition simpliciale.

que pour tout ensemble compact $C \subset W$ l'ensemble $f^{-1}(C)$ soit compact et que la courbe Ω soit recouverte par l'image de f d'une manière essentielle, alors f transforme l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ en Ω d'une manière essentielle.

15. On déduit du théorème 3 le corollaire suivant:

Corollaire. *Si Ω, W, M et f satisfont aux hopothèses du théorème 3 et si, en outre, tout ensemble compact $C \subset M$ se laisse contracter*[15]) *dans M, alors Ω n'est pas un rétracte de $f(M)$.*

Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $r(p)$ rétractant l'ensemble $f(M)$ en Ω. Soit $\{\varphi_t\}$ une famille de fonctions contractant l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ dans M. En posant $\psi_t(p) = r\varphi_t(p)$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(\Omega)$ et $t \epsilon \langle 0, 1 \rangle$, on obtient une famille de fonctions $\{\psi_t\} \subset \Omega^{f^{-1}(\Omega)}$ telle que $\psi_0(p) = f(p)$ et $\psi_1(p) = \text{const.}$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(\Omega)$. La transformation f de $f^{-1}(\Omega)$ en Ω n'est donc pas essentielle ce qui contredit la thèse du théorème 3.

16. Soit f une transformation continue de l'espace euclidien n-dimensionnel R_n en soi, pour laquelle le diamètre de toute tranche est inférieur à une certaine constante positive ε. Dans ces conditions, l'ensemble $f(R_n)$ est un domaine ouvert dans R_n [8]) et, comme nous l'avons prouvé dans le N⁰ **6**, tout sous-ensemble compact de $f(R_n)$ est recouvert par l'image de la fonction f d'une manière essentielle. En tenant compte du corollaire précédent, on en conclut qu'aucune courbe simple fermée n'est un rétracte de $f(R_n)$. Cette dernière propriété étant équivalente avec l'unicohérence du domaine $f(R_n)$ [16]), on parvient au corollaire suivant:

Corollaire. *Si f est une transformation de R_n en soi avec le diamètre des tranches uniformément borné, alors l'ensemble $f(R_n)$ est unicohérent.*

17. Comme nous l'avons établi dans le N⁰ **10**, le théorème 1 est une conséquence du théorème 2. Il ne reste donc qu'à prouver les théorèmes 2 et 3. Nous commençons par la démonstration du

[15]) *L'ensemble C se laisse contracter dans un espace M*, lorsqu'il existe une famille $\{\varphi_t\} \subset M^C$ contractant l'ensemble C dans M, c. à d. telle que $\varphi_0(x) = x$ et $\varphi_1(x) = \text{const.}$ pour tout $x \epsilon C$.

[16]) Voir ma Note „*Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*" Fund. Math. 17 (1931), p. 184.

Lemme 1. Prémisses: 1^0 *f est une transformation continue d'un espace arbitraire M en produit $Q=Q_m\times Q_{n-m}$, où Q_i désigne la sphère euclidienne i-dimensionnelle dont le centre est 0 et le rayon 1.*

2^0 *N est un sous-ensemble fermé de M tel que $f^{-1}(Q_m\times(0))\subset N$.*

3^0 *$\{\varphi_t\}$ est une famille de fonctions $\subset(Q_m\times Q_{n-m})^N$ satisfaisant aux conditions $\varphi_0(p)=f(p)$ pour tout $p\epsilon N$ et $\varphi_t^{-1}(Q_m\times(0))=f^{-1}(Q_m\times(0))$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$.*

Thèse. *Il existe une famille de fonctions $\{f_t\}\subset(Q_m\times Q_{n-m})^M$ telle que:* 1^0 *$f_0=f$;* 2^0 *$f_t(p)=\varphi_t(p)$ pour tout $p\epsilon N$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$;* 3^0 *$f_t^{-1}(Q_m\times(0))=f^{-1}(Q_m\times(0))$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$.*

Démonstration. Les fonctions f et φ_t sont de la forme

$$f(p)=(x(p),y(p)) \quad \textit{où} \quad x\epsilon Q_m^M \quad \textit{et} \quad y\epsilon Q_{n-m}^M, \tag{11}$$

$$\varphi_t(p)=(\xi_t(p),\eta_t(p)) \quad \textit{où} \quad \{\xi_t\}\subset Q^N \quad \textit{et} \quad \{\eta_t\}\subset Q_{n-m}^N. \tag{12}$$

On a en outre

$$y^{-1}(0)=\eta_t^{-1}(0) \quad \textit{pour tout} \quad t\epsilon\langle 0,1\rangle, \tag{13}$$

$$\xi_0(p)=x(p) \quad \textit{et} \quad \eta_0(p)=y(p) \quad \textit{pour tout} \quad p\epsilon N. \tag{14}$$

D'après un théorème général [6]), il existe une famille de fonctions $\{x_t\}\subset Q_m^M$ telle que

$$x_t(p)=\xi_t(p) \quad \textit{pour tout} \quad p\epsilon N, \tag{15}$$

$$x_0(p)=x(p) \quad \textit{pour tout} \quad p\epsilon M. \tag{16}$$

En désignant maintenant par S_{n-m-1} la surface de la sphère Q_{n-m}, posons

$r(a)=\varrho(a,0)$ *pour tout* $a\epsilon Q_{n-m}$,

$\theta(a)=$ *projection du point a du centre 0 sur S_{n-m-1}, pour tout* $a\epsilon Q_{n-m}-(0)$.

Nous pouvons considérer $r(a)$ et $\theta(a)$ comme des *„coordonnées polaires“* du point $a\epsilon Q_{n-m}-(0)$, en écrivant

$$a=[r(a),\theta(a)] \quad \text{pour tout} \quad a\epsilon Q_{n-m}-(0). \tag{17}$$

Les fonctions $r\eta_t$ constituent une famille $\subset\langle 0,1\rangle^N$. La fonction ry constituant un prolongement continu de la fonction $r\eta_0$ sur l'espace M tout entier et $\langle 0,1\rangle$ étant un rétracte absolu, on conclut [6]) de (14) qu'il existe une famille de fonctions

$\{a_t\}\subset\langle 0,1\rangle^M$ telle que a_t soit un prolongement de la fonction $r\eta_t$ et que $a_0(p)=ry(p)$ pour tout $p\epsilon M$. En désignant maintenant par T l'ensemble $N\times\langle 0,1\rangle+M\times(0)$, fermé dans l'espace $M\times\langle 0,1\rangle$, posons

$$r_t(p)=a_t(p)+\mathrm{Min}\{\varrho[(p,t),T],\ 1-a_t(p)\}$$

pour tout $(p,t)\epsilon M\times\langle 0,1\rangle$. On parvient ainsi à une famille $\{r_t\}\subset\langle 0,1\rangle^M$ satisfaisant aux conditions:

(17) $r_t(p)=r\eta_t(p)$ *pour tout* $(p,t)\epsilon N\times\langle 0,1\rangle$,

(18) $r_0(p)=ry(p)$ *pour tout* $p\,\epsilon\, M$,

(19) *Pour que* $r_t(p)=0$ *il faut et il suffit que* $p\epsilon f^{-1}(Q_m\times(0))$.

Ceci étant, posons pour tout i naturel

(20) $$M_i=\underset{p}{E}\,[p\epsilon M;\, r_t(p)\geqslant 1/i \quad \textit{pour tout} \quad t\epsilon\langle 0,1\rangle].$$

En tenant compte de la relation (19) et de la continuïté de la fonction $r_t(p)$, on a

(21) $$M-f^{-1}(Q_m\times(0))=\sum_{n=1}^{\infty}M_i$$

(22) $$M_i\subset M_{i+1}-\overline{M-M}_{i+1}.$$

Les fonctions η_t constituant une famille $\subset Q_{n-m}^N$ et la fonction θ étant uniformément continue dans l'ensemble $\underset{a}{E}[a\epsilon Q_{n-m};\, r(a)\geqslant 1]$, on conclut de (17) et (20) que les fonctions $\theta\eta_t$ considerées uniquement dans l'ensemble $N\cdot M_i$ constituent une famille de fonctions $\subset S_{n-m-1}^{N\cdot M_i}$. Or, en posant $M_0=0$, admettons que nous avons déjà défini une famille de fonctions $\{\theta_t\}\subset S_{n-m-1}^{M_i}$ telle que

(23_i) $\theta_t(p)=\theta\eta_t(p)$ *pour tout* $p\,\epsilon\, N\cdot M_i$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$,

(24_i) $\theta_0(p)=\theta y(p)$ *pour tout* $p\,\epsilon\, M_i$.

La fonction $\theta y(p)$ constituant un prolongement de la fonction $\theta\eta_0$ sur l'ensemble $M-f^{-1}(Q_m\times(0))$ et la surface sphérique S_{n-m-1} étant un rétracte absolu de voisinage [17]), on conclut d'un théorème général [6]) et de (14) que les fonctions θ_t

[17]) Un ensemble A est dit *rétracte absolu de voisinage* lorsqu'il existe pour tout espace A une fonction continue $r(x)$ transformant un entourage U de A en A de manière que $r(x)=x$ pour tout $x\,\varepsilon\, A$.

se laissent prolonger sur l'ensemble M_{l+1} de manière que les fonctions prolongées (que nous désignons aussi par θ_t) constituent une famille $\subset S_{n-m-1}^{M_{l+1}}$ satisfaisant aux conditions (23_{l+1}) et (24_{l+1}). En itérant ce procédé on parvient, selon (21) et (22), aux fonctions $\theta_t \epsilon S_{n-m+1}^{M-f^{-1}(Q_m \times (0))}$ qui, considerées seulement dans l'ensemble M_i (où le nombre naturél i est arbitrairement donné) constituent une famille, c. à d. $\theta_t(p)$ considerée comme une fonction de $(p,t) \epsilon [M-f^{-1}(Q_m \times (0))] \times \langle 0,1 \rangle$ et continue et qu'elle est uniformément continue par rapport à t dans chacun des ensembles $M_i \times \langle 0,1 \rangle$.

Cela posé, nous allons montrer que pour obtenir une famille $\{f_{.t}\}$ satisfaisant à la thèse du lemme il suffit de poser

$$(25) \quad f_t(p) = (x_t(p), [r_t(p), \theta_t(p)]) \quad \textit{pour tout} \quad p \epsilon M - f^{-1}(Q_m \times (0)) \quad \textit{et} \quad t \epsilon \langle 0,1 \rangle,$$

$$(26) \quad f_t(p) = (x_t(p), 0) \quad \textit{pour tout} \quad p \epsilon f^{-1}(Q_m \times (0)) \quad \textit{et} \quad t \epsilon \langle 0,1 \rangle.$$

En tenant compte des relations (25), (26), (17), (19) et de la continuité des fonctions $x_t(p), r_t(p)$ et $\theta_t(p)$, on conclut que $f_t(p)$ dépend d'une manière continue de la variable (p,t) parcourant $M \times \langle 0,1 \rangle$. Afin de prouver que la continuité par rapport à t est uniforme, envisageons un $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné. Soit i_0 un nombre naturel tel que

$$(27) \qquad 1/i_0 < \varepsilon/3.$$

Les fonctions x_t et r_t constituant des familles et la fonction $\theta_t(p)$ étant uniformément continue par rapport à t dans l'ensemble M_{i_0}, il existe un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|t-t'| < \eta$ entraîne les inégalités

$$(28) \quad \varrho(x_t(p) - x_{t'}(p)) < \varepsilon/3 \quad \textit{pour tout} \quad p \epsilon M.$$

$$(29) \quad |r_t(p) - r_{t'}(p)| < \varepsilon/3 \quad \textit{pour tout} \quad p \epsilon M$$

$$(30) \quad \varrho(\theta_t(p) - \theta_{t'}(p)) < \varepsilon/3 \quad \textit{pour tout} \quad p \epsilon M_{i_0}.$$

Or dans le cas où $p \epsilon M - M_{i_0}$ on a, selon (20) et (27), $r_t(p) < \varepsilon/3$ c. à d. les points $[r_t(p), \theta_t(p)]$ et $[r_{t'}(p), \theta_{t'}(p)]$ sont éloignés du point 0 de moins que $1/3\,\varepsilon$. On en conclut, d'après (25), (26) et (28) que

$$\varrho(f_t(p), f_{t'}(p)) < \varepsilon$$

pour tout $p \epsilon M - M_{t_0}$. Or cette inégalité est aussi valable dans le cas où $p \epsilon M_{t_0}$, comme on déduit des relations (25), (28), (29) et (30).

Nous avons ainsi prouvé que les fonctions f_t constituent une famille $\{f_t\} \subset (Q_m \times Q_{n-m})^M$. Afin de montrer que cette famille satisfait à la condition 1⁰ de la thèse du lemme, remarquons que, d'après (18), (25), (26), (17) et (16), on a $f_0(p) = f(p)$ pour tout $p \epsilon M$. La condition 2⁰ de la thèse du lemme est une conséquence immédiate des formules (17), (23$_i$), (21), (15), (13) et (12). On prouve enfin la condition 3⁰ de la thèse du lemme en rapprochant les formules (25) et (26) de la relation (19).

La démonstration du lemme 1 est ainsi terminée.

18. ***Démonstration du théorème 2.*** La position de la variété compacte m-dimensionelle V dans la variété W étant, par hypothèse, localement régulière, il existe pour tout $p \epsilon V$ un élément n-dimensionnel $Q(p)$ de la forme $Q_m \times Q_{n-m}$ tel que $Q(p) \cdot V = Q_m \times (0)$ et $p = (0, 0)$. Il est, en outre, à remarquer qu'il existe entre les éléments $Q(p)$ satisfaisant à ces conditions des éléments dont le diamètre est aussi petit qu'on le veut. Il en résulte qu'en fixant un recouvrement $Q^{(0)}$ qui fait correspondre à tout $p \epsilon V$ un élément $Q^{(0)}(p)$ satisfaisant aux conditions en question, on peut trouver un autre recouvrement $Q^{(1)}$ qui fait correspondre à tout $p \epsilon V$ un élément $Q^{(1)}(p)$ satisfaisant aux conditions analogues, de manière que pour tout $p \epsilon V$ la somme de tous les éléments du recouvrement $Q^{(1)}$ non disjoints avec $Q^{(1)}(p)$ soit contenue dans un seul élément du recouvrement $Q^{(0)}$. Un recouvrement $Q^{(1)}$ satisfaisant à ces conditions sera appelé *raffinement* du recouvrement $Q^{(0)}$.

Soit $Q^{(0)}$ un recouvrement arbitrairement donné (mais fixe) de V. Il existe alors des recouvrements $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(n+1)}$ de sorte que $Q^{(i+1)}$ est un raffinement du recouvrement $Q^{(i)}$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$. La variété V étant compacte, il existe un nombre positif ε tel que chaque sous-ensemble de V de diamètre $\leqslant \varepsilon$ est contenu dans un des éléments $Q^{(n+1)}(p)$ du recouvrement $Q^{(n+1)}$.

Soit maintenant f une transformation continue d'un espace M en W et $\{\varphi_t\}$ une famille de fonctions $\subset V^{\overset{-1}{f}(V)}$ telle que $\varphi_0(p) = f(p)$ pour tout $p \epsilon \overset{-1}{f}(V)$. Il existe alors un nombre

naturel k tel que l'inégalité $|t-t'|\leqslant 1/k$ entraîne l'inégalité, $|\varphi_t(p)-\varphi_{t'}(p)|\leqslant\varepsilon'$ pour tout $p\epsilon f^{-1}(V)$. Il en résulte que pour tout $l=0,1,\dots(k-1)$ les fonctions $\varphi_t^{(l)}=\varphi_{\frac{l}{k}+\frac{1}{k}t}$, où $0\leqslant t\leqslant 1$, constituent une famille $\{\varphi_t^{(l)}\}\subset V^{f^{-1}(V)}$ telle que $|\varphi_t^{(l)}(p)-\varphi_{t'}^{(l)}(p)|<\varepsilon/3$ pour tout $p\epsilon f^{-1}(V)$ et $t,t'\epsilon\langle 0,1\rangle$. Or, pour obtenir une famille $\{f_t\}\subset W^M$ satisfaisant à la thèse du théorème 2, il suffit de prouver qu'on peut trouver tour à tour des familles $\{f_t^{(l)}\}\subset W^M$ telles que $f_t^{(l)}$ soit un prolongement de $\varphi_t^{(l)}$ et que $f_0^{(0)}=f;f_0^{(l+1)}=f_1^{(l)}$ et $f_t^{(l)-1}(V)=f_0^{(l)-1}(V)$ pour tout $l=0,1,\dots(k-1)$. Cette remarque nous permet de nous borner dans la démonstration du théorème 2 au cas où la famille donnée $\{\varphi_t\}\subset V^{f^{-1}(V)}$ satisfait elle-même à la condition

(31) $\varrho[\varphi_t(p),\varphi_{t'}(p)]\leqslant\varepsilon/3$ *pour tout* $p\epsilon f^{-1}(V)$ *et* $t,t'\epsilon\langle 0,1\rangle$.

D'après un théorème général de la théorie de la dimension [18]), il existe une décomposition de W en sous-ensembles fermés $W_1,W_2,\dots,W_s$ satisfaisant aux conditions:

(32) $$W_{i_1}\cdot W_{i_2}\dots\cdot W_{i_{n+2}}=0$$

pour tout système de $n+2$ indices différents $i_1,i_2,\dots,i_{n+2}$,

(33) *Si* $W_i\cdot V\neq 0$, *alors le diamètre de* W_i *est* $<\varepsilon/3$.

En outre, nous pouvons choisir les indices des ensembles $W_1,W_2,\dots,W_s$ de manière qu'il existe un $\sigma\leqslant s$ tel que

(34) $W_i\cdot V\neq 0$ pour $i\leqslant\sigma$ et $W_i\cdot V=0$ pour $i>\sigma$.

Posons maintenant

(35) $$M_\nu=f^{-1}(V)+\sum_{i=\sigma+1}^{s}f^{-1}(W_i)+\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_\nu)}f^{-1}(W_{i_1}\cdot W_{i_2}\cdot\dots\cdot W_{i_\nu}),$$

où la dernière sommation s'étend sur tous les systèmes $(i_1,i_2\dots i_{\nu-1})$ de v indices différents. Les ensembles M_ν ainsi définis sont fermés et tels que

(36) $$M_1=M,\ M_\nu\subset M_{\nu-1};\ M_{n+2}=f^{-1}(V)+\sum_{i=\sigma+1}^{s}f^{-1}(W_i).$$

[18]) Voir p. ex. K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1928 p. 158.

On a en outre

$$(37) \qquad M_{\nu-1}-M_\nu=\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{\nu-1})}[f^{-1}(W_{i_1}\cdot W_{i_2}\cdot\ldots\cdot W_{i_{\nu-1}})-M_\nu],$$

où la sommation s'étend sur tous les systèmes $(i_1,i_2,\dots,i_{\nu-1})$ de $\nu-1$ indices différents et $\leqslant\sigma$. On voit sans peine que les termes de cette somme sont disjoints deux-à-deux et que chacun d'eux est ouvert dans $M_{\nu-1}$ et sa frontière (par rapport à $M_{\nu-1}$) est contenue dans M_ν et dans chacun des ensembles $f^{-1}(M_{i_j})$, où $j=1,2,\dots,\nu-1$.

Ceci établi, posons

$$(38) \qquad f_t(p)=\varphi_t(p) \quad \textit{pour tout} \quad p\,\epsilon\, f^{-1}(V) \quad \textit{et} \quad t\,\epsilon\langle 0,1\rangle,$$

$$(39) \qquad f_t(p)=f(p) \quad \textit{pour tout} \quad p\,\epsilon \sum_{i=\sigma+1}^{s} f^{-1}(W_i) \quad \textit{et} \quad t\,\epsilon\langle 0,1\rangle.$$

Les formules (38) et (39) définissent, selon (36), une famille de fonctions $\subset W^{M_{n+2}}$ satisfaisant dans M_{n+2} aux conditions:

$$(40) \qquad f_0(p)=f(p),$$

$$(41) \qquad f_t^{-1}(V)=f^{-1}(V).$$

Remarquons, en outre que la famille $\{f_t\}$ ainsi définie dans M_{n+2} satisfait pour $\nu=n+2$ à la condition suivante:

(42_ν) | *Pour tout indice* $i\leqslant\sigma$ *l'ensemble* $\sum_{0\leqslant t\leqslant 1} f_t[f^{-1}(W_i)\cdot M_\nu]$ *est contenu dans un des éléments du recouvrement* $Q^{(\nu-1)}$.

En effet, d'après (36) on a

$$f^{-1}(W_i)\cdot M_{n+2}=f^{-1}(W_i\cdot V)+f^{-1}\Big(W_i\cdot\sum_{j=\sigma+1}^{s}W_j\Big).$$

En tenant compte des relations (38), (31), (33) et (39), on a pour tout couple p, p' de points de $f^{-1}(W_i)\cdot M_{n+2}$ et tout couple de nombres $t,t'\,\epsilon\langle 0,1\rangle$

$$\varrho[f_t(p),f_{t'}(p')]\leqslant\varrho[f_t(p),f(p)]+\varrho[f(p),f(p')]+\varrho[f(p'),f_{t'}(p')]\leqslant\varepsilon.$$

Il en résulte, d'après la définition de la constante ε, que la condition (42_{n+2}) est remplie.

Admettons, à présent, qu'on a déjà défini pour un certain naturel $\nu \leqslant n+2$ une famille de fonctions $\{f_t\} \subset W^{M_\nu}$ satisfaisant aux conditions (38), (39), (40), (41) et (42_ν). Nous allons montrer qu'on peut trouver pour les fonctions de cette famille des prolongements continus (que nous allons désigner aussi par f_t) constituant une famille $\subset W^{M_{\nu-1}}$ et satisfaisant aux conditions (38), (39), (40), (41) et $(42_{\nu-1})$.

Soit $I=(i_1, i_2, \ldots, i_{\nu-1})$ un système d'indices différents $\leqslant \sigma$ arbitrairement donné. En tenant compte de la formule (37) il suffit de prolonger f_t d'une manière convenable sur chacun des ensembles de la forme $T_I = f^{-1}(W_{i_1} \cdot W_{i_2} \ldots W_{i_{\nu-1}}) - M_\nu$. A ce but faisons correspondre au système I un de ses éléments $i(I)$. L'ensemble T_I étant ouvert dans l'ensemble fermé $M_{\nu-1}$, sa frontière F_I est égale à $\overline{T}_I - T$ et elle est contenue dans M_ν. Or les fonctions f_t sont définies dans F_I et ses valeurs appartiennent à l'ensemble des valeurs que f_t prend dans chacun des ensembles $f^{-1}(W_{i_j}) \cdot M_\nu$, où $j=1,2,\ldots,v-1$. On a en particulier

$$(43) \qquad f_t(F_I) \subset \sum_{0 \leqslant t \leqslant 1} f_t[f^{-1}(W_{i(I)}) \cdot M_\nu] \qquad \textit{pour tout} \qquad t \in \langle 0,1 \rangle.$$

Or, d'après (42_ν), il existe un élément Q_I du recouvrement $Q^{(\nu-1)}$ satisfaisant à l'inclusion

$$(44) \qquad \sum_{0 \leqslant t \leqslant 1} f[f^{-1}(W_{i(I)}) \cdot M_\nu] \subset Q_I.$$

En tenant compte de (40) et (41) et en appliquant le lemme 1 du N° **17** on en conclut qu'il existe pour les fonctions f_t, envisagées uniquement dans F_I, une famille de prolongements (que nous désignons aussi par $f_t) \subset Q_I^{\overline{T}_I}$ telle que $f_0(p) = f(p)$ pour tout $p \in \overline{T}_I$ et $f_t^{-1}(V \cdot Q_I) = f^{-1}(V \cdot Q_I)$ pour tout $t \in \langle 0,1 \rangle$.

En appliquant ce procédé à chacun des ensembles T_I, on parvient, d'après (37), à une famille de fonctions $\{f_t\} \subset W^{M_{\nu-1}}$ satisfaisant aux conditions (38), (39), (40) et (41). Il ne reste donc qu'à prouver que les fonctions f_t satisfont aussi à la

relation $(42_{\nu-1})$. Dans ce but remarquons que l'ensemble $f^{-1}(W_i)\cdot M_{\nu-1}$ est, pour tout $i\leqslant\sigma$, une somme de $f^{-1}(W_i)\cdot M_\nu$ et de $f^{-1}(W_i)\cdot\sum_I T_I$, où la sommation s'étend sur tous les systèmes $I=(i_1 i_2\dots i_{\nu-1})$ des $v-1$ indices différents $\leqslant\sigma$ tels que $f^{-1}(W_i\cdot W_{i_1}\dots W_{i_{\nu-1}})\neq 0$. Or, d'après (42_ν), il existe un élément $Q_{(i)}$ du recouvrement $Q^{(\nu-1)}$ tel que

$$(45)\qquad \sum_{0\leqslant t\leqslant 1} f_t[f^{-1}(W_i)\cdot M_\nu]\subset Q_{(i)}.$$

On a, en outre, d'après la définition de f_t dans T_I l'inclusion suivante

$$(46)\qquad \sum_{0\leqslant t\leqslant 1} f_t(T_I)\subset Q_I.$$

L'ensemble $W_i\cdot W_{i_1}\dots W_{i_{\nu-1}}$ étant non vide, on conclut de la relation (33) que le diamètre de la somme $W_i+W_{i_1}+\dots+W_{i_{\nu-1}}$ est $<\varepsilon$. Or il existe un élément $Q'_{(i)}$ du recouvrement $Q^{(\nu-1)}$ contenant l'ensemble $W_i+W_{i_1}+\dots+W_{i_{\nu-1}}$ tout entier. Remarquons, en outre, que les relations (44) et (45) entraînent $V\cdot W_i\subset Q_{(i)}$ et $V\cdot W_{i(I)}\subset Q_I$. Il s'ensuit que $Q'_{(i)}\cdot Q^1_{(i)}\neq 0\neq Q_I\cdot Q'_{(i)}$. Or il existe un élément du recouvrement $Q^{(\nu-2)}$ contenant tous les éléments $Q_{(i)}$ et Q_I, c.à d. la relation $(42_{\nu-1})$ est démontrée.

Nous avons ainsi prouvé que le procédé de prolongement des fonctions f_t, définies dans l'ensemble M_{n+2} par les formules (38) et (39) peut être appliqué tour-à-tour dans les ensembles $M_{n+1}, M_n, \dots, M_1$ de manière que les conditions (40) et (41) soient remplies. L'ensemble M_1 coïcidant, d'après (36), avec M, nous parvenons de cette manière à la famille $\{f_t\}\subset W^M$ satisfaisant aux conditions (38), (40) et (41), c.à d. à la thèse du théorème 2.

19. ***Lemme 2.*** *Prémisses*: 1° *f est une fonction transformant un espace M en une variété n-dimensionnelle W de manière que pour tout ensemble compact $C\subset W$ l'ensemble $f^{-1}(C)$ soit compact.*

2° *A est un sous-ensemble compact de W recouvert par l'image de f d'une manière essentielle.*

Thèse: Il existe un entourage U de A (dans W) recouvert par l'image de f d'une manière essentielle.

Démonstration. Soit G un entourage de l'ensemble $f^{-1}(A)$ (dans l'espace M) tel que pour toute famille de fonctions $\{f_t\}\subset W^M$ telle que $f_0=f$ et $f_t(p)=f(p)$ pour tout $p\epsilon M-G$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$ on ait $A\subset f_1(M)$. Remarquons qu'il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel qu'on a

$$(47)\qquad \varrho(a,f(p))\geqslant\varepsilon \qquad \textit{pour tout} \qquad a\epsilon A \quad \textit{et} \quad p\epsilon M-G.$$

En effet, en tenant compte de ce que A est compact, on conclut que dans le cas contraire il existerait une suite $\{p_k\}\subset M-S$ et un point $a_0\epsilon A$ tel que $f(p_k)\to a_0$. Soit Q un élément n-dimensionnel constituant un entourage (dans W) de a_0. L'ensemble $f^{-1}(Q)$ étant (selon 1⁰) compact, il contient presque tous les points p_k. Or il existe une suite partielle $\{p_{k_i}\}$ convergente vers un point p_0. L'ensemble $M-G$ étant fermé, on a $p_0\epsilon M-G$. D'autre part on a $f(p_0)=\lim\limits_{i=\infty}f(p_{k_i})=a_0\epsilon A$, c. à d. $p_0\epsilon f^{-1}(A)$, ce qui contredit l'inclusion $f^{-1}(A)\subset G$.

L'existence d'un nombre $\varepsilon>0$ satisfaisant à l'inégalité (47) ainsi établie, nous pouvons faire correspondre à tout $a\epsilon A$ un élément n-dimensionnel $Q(a)\subset W-f(M-G)$ constituant un entourage de a dans (l'espace W). En désignant par $R(a)$ l'intérieur de $Q(a)$, posons $U=\sum\limits_{a\epsilon A}R(a)$. L'ensemble U ainsi défini constitue un entourage de A (dans W) tel que $f^{-1}(U)\cdot(M-G)=0$, c. à d. $f^{-1}(U)\subset G$. Or l'ensemble G est un entourage de $f^{-1}(U)$ dans W. Il ne reste qu'à prouver que pour toute famille $\{f_t\}\subset W^M$ satisfaisant aux conditions: $f_0=f$, $f_t(M-G)\subset W-U$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$, on a $U\subset f_1(M)$. Dans le cas contraire, il existerait notamment un point $b\epsilon U-f_1(M)$. Soit $b\epsilon R(a)$, où $a\epsilon A$. On voit aisément que l'ensemble $Q(a)-(b)$ se laisse transformer en la surface $S(a)=Q(a)-R(a)$ de $Q(a)$ par une déformation continue dans soi, pendant laquelle tous les points de la surface $S(a)$ restent fixes. Il en résulte, qu'il existe une déformation continue $\varphi(x,t)$ de $W-(b)$ satisfaisant aux conditions: $\varphi(x,0)=x$, $\varphi(x,t)\epsilon W$ pour tout $x\epsilon W$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$, $\varphi(W,1)=W-R(a)$, $\varphi(x,t)=x$ pour tout $x\epsilon W-R(a)$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$. Or, en posant

$f_t(p)=f_{2t}(p)$ pour tout $p\epsilon M$ et $t\epsilon\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$ et $f_t'(p)=\varphi[f_1(p),2t-1]$ pour tout $p\epsilon M$ et $t\epsilon\langle\frac{1}{2},1\rangle$, on obtient évidemment une famille $\{f_t'\}\subset W^M$ satisfaisant aux conditions: $f_0'=f$; $f_t'(M-G)\subset W-A$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$ et $f_1'(M)=\varphi[f_1(M),1]\subset W-R(a)$, ce qui est impossible, car $a\epsilon A\cdot R(a)$ et l'ensemble était supposé recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f.

La démonstration du lemme 2 est ainsi terminée.

20. ***Lemme 3.*** *Toute courbe simple fermée A contenue dans une variété polyédrique (finie ou non) W se laisse transformer, pour tout $\varepsilon>0$, par une homéomorphie φ_ε, satisfaisant à l'inégalité $\varrho[\varphi_\varepsilon(x),x]<\varepsilon$ pour tout $x\epsilon A$, en une courbe simple fermée A' située dans W dans une position localement régulière.*

Démonstration. En tenant compte du fait que dans une variété de dimension $\leqslant 2$ chaque courbe simple fermée est située dans une position localement régulière (voir N° 7, exemple 2) nous n'avons qu'à considérer le cas où la dimension n de W est $\geqslant 3$.

Envisageons une décomposition simpliciale T de la variété W si fine que chacun de ses simplexes soit de diamètre $<\varepsilon/6$. Or il existe un nombre positif $\eta<\varepsilon$ tel que chaque sous-ensemble de W non disjoint avec A et dont le diamètre est $<\eta$ est contenu dans l'étoile d'un sommet a de A (c. à d. dans la somme de tous les simplexes de T ayant a comme un de leurs sommets).

Soit $a_0,a_1,\dots,a_k=a_0$ un système de $k>3$ points de A coupant A en k arcs simples $L_1,L_2,\dots,L_k$ tels que les points a_{i-1} et a_i constituent les extrémités de l'arc L_i et que pour $i\neq j$ le diamètre de L_i soit $<\eta/3$. En faisant correspondre à tout $i=1,2,\dots,k$ un point a_i' situé dans l'intérieur d'un simplexe n-dimensionnel de T et tel que $\varrho(a_i,a_i')<\eta/3$, on a $\varrho(a_{i-1}',a_i')<\eta$ pour tout $i=1,2,\dots,k$. Il en résulte que a_{i-1}' et a_i' appartiennent aux intérieurs des simplexes n-dimensionnels Δ et Δ' de T ayant un (au moins) sommet a commun. T étant une décomposition simpliciale d'une variété, il existe dans l'étoile de a un système $\Delta_0,\Delta_1,\dots,\Delta_{l-1}$ $(l\geqslant -1)$ de simplexes n-dimensionnels différents deux-à-deux tel que $\Delta_0=\Delta$; $\Delta_{l+1}=\Delta'$ et que

la partie commune de $\Delta_{\nu-1}$ et Δ_ν $(\nu=1,2,\dots,l+1)$ soit égale à un simplexe $(n-1)$-dimensionnel Λ_ν de T. En choisissant maintenant dans l'intérieur de chacun des simplexes Δ_ν un point $a_{l,\nu}$ et dans l'intérieur de chacun des simplexes Λ_ν un point $b_{i,\nu}$, posons

$$L_i'=\overline{a_i b_{i,1}}+\sum_{\nu=1}^{l}(\overline{b_{l,\nu}a_{l,\nu}}+\overline{a_{i,\nu}b_{l,\nu+1}})+\overline{b_{l,l+1}a_{l+1}'}.$$

Les simplexes Δ_ν étant disjoints deux-à-deux, la ligne polygonale L_i' est un arc simple joignant les points a_{i-1}' et a_i' dans l'étoile du point a. Or, le diamètre de L_i' est $<\varepsilon/3$. En outre, en tenant compte de l'hypothèse que la dimension de W est $\geqslant 3$, on peut choisir les points a_l', $a_{l,\nu}$ et $b_{l,\nu}$ de façon que les lignes polygonales L_i' soient dans une „position générale", c. à d. que la partie commune de L_i' et L_j' ne contienne pour $i\neq j$ que les extrémités communes de ces arcs simples. Il en résulte que l'ensemble $A'=\sum_{i=1}^{k}L_i'$ est une courbe simple fermée. Nous allons prouver que cette courbe satisfait à la thèse du lemme.

Dans ce but définissons φ_ε dans chacun des arcs L_i comme une homéomorphie transformant L_i en L_i' de manière que $\varphi_\varepsilon(a_i)=a_i'$ pour tout $i=1,2,\dots,k$. On obtient ainsi une homéomorphie transformant A en A'. Pour tout $x\epsilon L_i$ la distance entre x et $\varphi_\varepsilon(x)$ ne surpasse pas la somme des diamètres de L_i et L_i' et de la distance de a_i et a_i', donc elle est $<\varepsilon$.

Il ne reste donc qu'à prouver que la position de A' dans W est topologiquement régulière. Dans ce but remarquons d'abord que la courbe A' est construite de telle façon qu'elle est disjointe avec chaque simplexe $(n-2)$-dimensionnel de la décomposition T et que pour tout simplexe n-dimensionnel Δ de T la ligne polygonale $\Delta\cdot A'$ se décompose en segments rectilignes de manière que chaque point de A' situé sur la frontière de Δ n'appartient qu'à un seul segment de cette décomposition. Soit a un point arbitraire de A'. Dans le cas où a est un point intérieur d'un simplexe n-dimensionnel Δ de T il existe dans $\Delta\cdot A'$ deux segments rectilignes $\overline{aa_0}$ et $\overline{aa_0'}$, ayant (a) comme partie commune, et un hyperplan $(n-1)$-di-

mensionnel H contenant a et coupant Δ entre a_0 et a'_0. En choisissant maintenant un simplexe $(n-1)$-dimensionnel $\Delta(a_1 a_2 \dots a_n)$ dans $H \cdot \Delta$ contenant a dans son intérieur et ayant un diamètre suffisamment petit, on constate sans peine que l'ensemble $Z = \Delta(a_0 a_1 \dots a_n) + \Delta(a'_0 a_1 \dots a_n)$ satisfait aux conditions de la définition 2 du Nr 7. Dans le cas où a n'est situé dans l'intérieur d'aucun simplexe n-dimensionnel de T, il existe deux simplexes n-dimensionnels Δ et Δ' de T contigus à une face commune $(n-1)$-dimensionnelle Λ contenant a dans son intérieur et tels qu'il existe deux points $a_0 \epsilon \Delta$ et $a'_0 \epsilon \Delta'$ tels que les segments $\overline{a_0 a}$ et $\overline{a'_0 a}$ soient contenus dans A'. En choisissant dans Λ un simplexe $(n-1)$-dimensionnel $\Delta(a_1 a_2 \dots a_n)$ suffisamment petit et contenant a dans son intérieur, on voit aisément que l'ensemble $Z = \Delta(a_0 a_1 \dots a_n) + \Delta(a'_0 a_1 \dots a_n)$ satisfait aux conditions de la définition 2 du N⁰ 7.

21. ***Lemme 4.*** *Prémisses*: 1⁰ *A est un rétracte absolu de voisinage* [17]) *situé dans un espace arbitraire E,*

2⁰ *f est une transformation continue d'un espace compact M en un sous-ensemble de E,*

3⁰ *Pour tout nombre naturel n il existe un ensemble $A_n \subset E$ tel que f transforme l'ensemble $f^{-1}(A_n)$ en A_n d'une manière essentielle et qu'il existe une homéomorphie φ_n transformant A en A_n et satisfaisant à l'inégalité $\varrho[\varphi_n(x), x] \leqslant 1/n$ pour tout $x \epsilon A$.*

Thèse. La fonction f transforme l'ensemble $f^{-1}(A)$ en A d'une manière essentielle.

Démonstration. Supposons au contraire que f transforme $f^{-1}(A)$ en A d'une manière inessentielle. Il existe alors une famille $\{f_t\} \subset A^{f^{-1}(A)}$ telle que $f_0(x) = f(x)$ pour tout $x \epsilon f^{-1}(A)$ et

$$f_1[f^{-1}(A)] \neq A. \tag{48}$$

L'ensemble A étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un prolongement continu f'_0 de la fonction f_0 sur un entourage U de A dans l'espace E. On en conclut [6]) qu'il existe une famille $\{f'_t\} \subset A^U$ telle que f'_t soit un prolongement de f_t sur U pour tout $t \epsilon \langle 0, 1 \rangle$. En tenant compte de (48) on en conclut qu'il existe un entourage $U' \subset U$ de $f^{-1}(A)$ tel que

$f'_1[f^{-1}(A)] \neq A$. Or f'_0 transforme U' en A d'une manière inessentielle. En tenant compte de 3⁰, on a pour tout n suffisamment grand $f^{-1}(A_n) \subset U'$, donc la fonction f'_0 est définie dans l'ensemble $f^{-1}(A_n)$ en le transformant en A d'une manière inessentielle. En posant maintenant

$$f_n(x) = \varphi_n^{-1} f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \epsilon f^{-1}(A_n)$$

on obtient une transformation essentielle de $f^{-1}(A_n)$ en A, car f transforme $f^{-1}(A_n)$ en A_n d'une manière essentielle et φ_n^{-1} est une homéomorphie. En tenant compte de 3⁰ et de la définition de la fonction f'_0 comme d'un prolongement continu de la fonction f considérée uniquement dans l'ensemble $f^{-1}(A)$, on conclut que la distance entre f_n et f'_0 (considérée uniquement dans l'ensemble $f^{-1}(A_n)$) tend vers 0. Or c'est impossible, car pour tout rétracte absolu de voisinage A il existe une constante positive ε telle que pour tout espace X la distance entre deux composantes diffèrentes de l'espace A^X est toujours $\geqslant \varepsilon$ [19]).

22. ***Démonstration du théorème 3.*** Soit Ω une courbe simple fermée située dans une variété polyèdrique W et soit f une fonction continue transformant un espace M en W de manière que pour tout ensemble compact $C \subset W$ l'ensemble $f^{-1}(C)$ soit compact et que la courbe Ω soit recouverte par l'image de f d'une manière essentielle. D'après le lemme du N⁰ **19** il existe un entourage U de Ω (dans W) recouvert par l'image de f d'une manière essentielle. Or, chaque entourage de Ω contenu dans U est aussi recouvert par l'image de f d'une manière essentielle. Ceci nous permet d'admettre que la fermeture $\overline{U}$ de U est compacte. L'ensemble $f^{-1}(\overline{U})$ contenant $f^{-1}(U)$ dans son intérieur, on conclut de (10) que l'ensemble U est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f considerée uniquement dans l'ensemble compact $f^{-1}(\overline{U})$. Or, d'après le lemme 3 du N⁰ **20**, il existe pour tout

---

[19]) Voir ma Note „*Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*", Fund. Math. 19 (1932), p. 225.

nombre naturel n une homéomorphie φ_n transformant Ω en une courbe simple fermée $\Omega_n = \varphi_n(\Omega)$ située dans M dans une position localement régulière et satisfaisant à l'inégalité $\varrho[\varphi_n(x), x] \leqslant 1/n$ pour tout $x \epsilon \Omega$. Mais, d'après le théorème 1 du N° **8**, la fonction f transforme l'ensemble $f^{-1}(\Omega_n)$ en Ω_n d'une manière essentielle. En tenant compte du lemme 4 du N° **21** on en conclut que f transforme aussi l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ en Ω d'une manière essentielle. La démonstration du théorème 3 est ainsi achevée.

SUR LES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE

Par M. EMILE COTTON, Grenoble

La famille des courbes (Γ) égales à une courbe gauche donnée est déterminée par les expressions de la courbure c et de la torsion t en fonction de l'arc s de la courbe. Une certaine condition, $R=0$, doit être remplie pour que l'une des courbes (Γ) soit tout entière située sur une surface donnée (S); elle fait l'objet du présent article. En général R s'exprime avec c et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à quatre, t et ses dérivées des trois premiers ordres (n° 1). Lorsque (S) est invariante par les transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements, l'ordre maximum des dérivées de c ou de t intervenant dans la relation $R=0$, s'abaisse (n° 2). La relation $R=0$ est bien connue dans le cas du plan ou de la sphère; le cas du cylindre de révolution étudié ici (n° 3) conduit à une relation qu'il serait possible d'écrire explicitement, mais qui est loin d'être aussi simple que dans les deux cas précédents. Quelques mots concernent enfin (n° 4) le système formé par deux équations $R=0$.

1. Soit $f(x,y,z)$ une fonction des trois coordonnées rectangulaires d'un point M. Lorsque M décrit une courbe (Γ), x,y,z sont fonctions de l'arc (ou abscisse curviligne) s de (Γ); et f devient une fonction de s, soit $F(s)$. Les dérivées successives de F se calculent par les formules connues de dérivation des fonctions composées, et les formules de Frenet permettent de les exprimer au moyen de x,y,z, des cosinus directeurs α,β,γ, α',β',γ' de la tangente MT et de la normale principale MN, des expressions $c(s)$, $t(s)$ de s donnant la courbure et la torsion de (Γ) en fonction de l'abscisse curviligne, et de leurs dérivées successives $c',t',c'',t'',\ldots$

Supposons maintenant (Γ) située sur la surface (S) d'équation:

(1) $$f(x,y,z)=0;$$

$F(s)$ et ses dérivées sont nulles. D'autre part, les cosinus directeurs de deux droites perpendiculaires sont fonctions de trois variables indépendantes seulement, il arrive en général que les 6 équations

(2) $$F(s)=0, \quad \frac{dF}{ds}=0, \quad \frac{d^2F}{ds^2}=0, \ldots, \quad \frac{d^5F}{ds^5}=0$$

(dont les premiers membres sont exprimés comme il a été dit plus haut) permettent de considérer x,y,z et les cosinus $\alpha,\beta,\ldots,\gamma'$ comme fonctions composées de s par l'intermédiaire de $c(s)$, $t(s)$ et de leurs dérivées c',c'',c''',t',t''. En portant ces expressions de $x,y,\ldots,\gamma'$ dans l'équation $\frac{d^6F}{ds^6}=0$, on trouve une relation

(3) $$R(c'''',c''',c'',c',c,t''',t'',t',t)=0,$$

condition nécessaire pour que (Γ) puisse être placée sur la surface (S). On peut (en supposant les données analytiques et utilisant la série de Taylor) démontrer que, parmi les courbes (Γ) dont la courbure et la torsion sont des fonctions données $c(s)$, $t(s)$ vérifiant identiquement la relation (3) (courbes égales entre elles), il en est au moins une située tout entière sur (S).

Lorsque (S) *est une surface algébrique*, les premiers membres des équations (2) sont des polynômes en $x,y,\ldots,t''$ et le premier membre de (3) est un polynôme.

Si l'on remplace l'équation (1) *de* (S) *par l'équation d'une surface égale* (S^*) *rapportée aux mêmes axes, on obtient encore la même relation* (3). Soit en effet (Γ_0) celle des courbes (Γ) qui est sur (S), déplaçons simultanément (S) et (Γ_0) de manière à faire coïncider (S) avec (S^*), (Γ_0) occupera une nouvelle position (Γ_0^*) située sur (S^*), les fonctions $c(s)$, $t(s)$ ne sont pas modifiées et ne cessent pas de vérifier la relation (3).

2. *Lorsque la surface* (S) *est invariante vis à vis des transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements*, la relation (3) est remplacée par une relation plus simple, en ce sens que les ordres des dérivées de c et de t qu'elle utilise sont inférieurs à ceux du cas général.

Considérons d'abord le cas où (S) est un plan. Une courbe plane a une torsion nulle, (3) est remplacée par $t=0$. Supposons ensuite (S) sphère de rayon R. La relation cherchée s'obtient en exprimant que R est le rayon d'une sphère osculatrice à (S), ce qui donne aisément

$$c'^2+t^2c^2=R^2t^2c^4.$$

Dans les exemples précédents, le sous-groupe est à trois paramètres; examinons ensuite les sous-groupes à un paramètre: *Si* (S) *est un cylindre* on peut partir de l'équation

$$f(x,y)=0$$

la variable z ne figurant pas, il suffit des cinq premières équations (2) pour déterminer les variables restantes; en portant dans la sixième, on a une relation de la forme

$$R(c''',c'',c',c,t'',t',t)=0. \tag{4}$$

Si (S) *est une surface hélicoïdale, ou une surface de révolution*, on peut, en prenant pour Oz l'axe du mouvement qui la laisse invariante, remplacer (1) par la représentation parametrique

$$x=\varrho\cos\theta, \qquad y=\varrho\sin\theta, \qquad z=g(\varrho)+h\theta, \tag{5}$$

h est une constante (nulle si la surface est de révolution).

Les cosinus directeurs de la tangente MT à une courbe de la surface sont

$$\alpha=\cos\theta\frac{d\varrho}{ds}-\varrho\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \beta=\sin\theta\frac{d\varrho}{ds}+\varrho\cos\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \gamma=g'(\varrho)\frac{d\varrho}{ds}+h\frac{d\theta}{ds}.$$

Soit λ l'angle de MT et du prolongement ML du rayon du cylindre de révolution d'axe $0z$ passant par M

$$\cos\lambda=\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\frac{d\varrho}{ds};$$

la relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(1+g'^2)\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2+2hg'\frac{d\varrho}{ds}\frac{d\theta}{ds}+(\varrho^2+h^2)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=1,$$

donne ensuite $\dfrac{d\theta}{ds}$; α, β, γ s'expriment donc en fonction de ϱ, θ et λ. Soit de même μ l'angle que la normale principale de (Γ) fait avec ML, les relations

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha' \cos\theta + \beta' \sin\theta = \cos\mu, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

donnent α', β', γ' en fonction de $\varrho, \theta, \lambda, \mu$.

(Géométriquement, ces derniers résultats tiennent à ce que M décrivant une hélice tracée sur (S), le plan tangent en M à (S), la droite ML, la parallèle Mz' à Oz constituent une figure de forme invariable).

Puisque x, y, z et les six cosinus sont fonctions de quatre variables seulement, et que la première des équations (2) est vérifiée identiquement, l'élimination de ces variables peut être faite entre les relations (2) et on obtient encore une relation de la forme (4).

3. Un dernier cas reste à considérer, celui où (S) *est un cylindre de révolution*; le sous-groupe est à deux paramètres. La représentation paramétrique (5) ne peut plus être utilisée, ϱ étant constant. Nous étudions ce cas par une méthode un peu différente.

Considérons un cylindre défini par un trièdre mobile de Darboux $Mxyz$, l'axe Mx étant tangent à la section droite passant en M, l'axe My la génératrice passant en ce point, l'axe Mz étant normal à la surface. En prenant pour paramètre l'abscisse curviligne u de la section droite et la distance v de M à un plan fixe perpendiculaire aux génératrices, on a, avec les notations des Chapitres I et II du livre V du tome II des *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, de Darboux, les formules suivantes pour les translations et rotations du trièdre

$$\xi = A = 1, \qquad \eta = \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = C = 1, \qquad p = q_1 = 0, \qquad r = r_1 = 0,$$
$$p_1 = 1/R' = 0.$$

De plus, q est fonction de la seule variable u, et $-1/q = R$ est le rayon de courbure de la section droite.

Les formules

$$\frac{du}{ds}=\cos\omega,\qquad \frac{dv}{ds}=\sin\omega \tag{6}$$

$$c\cos\overline{\omega}=-q\cos^2\omega \tag{7}$$

$$\frac{d\omega}{ds}=c\sin\overline{\omega} \tag{8}$$

$$\frac{d\overline{\omega}}{ds}=t+q\cos\omega\sin\omega \tag{9}$$

concernant une ligne (Γ) tracée sur la surface sont données par Darboux (*Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II, tableaux II et V, p. 383, 386); ω est l'angle $\widehat{Mx,MT}$, MT étant tangente à (Γ), $\overline{\omega}=\widehat{MN,Mz}$, MN étant la normale principale; s est l'abscisse curviligne, enfin $c=1/\varrho$ et $t=1/\tau$ désignent respectivement la courbure et la torsion.

Nous les utiliserons en regardant c et t comme des fonctions données de s, ce qui détermine la courbe (Γ) à un déplacement près et permet de déterminer en fonction de s $\omega, \overline{\omega}, u, v, q$. D'une façon plus précise, en remplaçant q par sa valeur tirée de (7) dans (9), on a une équation (9′) constituant avec (8) un système d'équations différentielles que ω, $\overline{\omega}$ doivent vérifier; ayant ω, les équations (6) donnent u et v par des quadratures, et q se déduit de (7).

Géométriquement ω et $\overline{\omega}$ donnent la position du trièdre $Mxyz$ par rapport au trièdre de Frenet, l'axe My a une direction fixe dans l'espace, et engendre un cylindre (S); la section droite en est déterminée par sa courbure $(-q)$ et par son abscisse curviligne u, enfin v donne la distance de M à une section droite.

Nous aurons à utiliser une équation donnant dq/ds en fonction de q, ω, s. Pour la former on écrit d'abord:

$$\left(\frac{d\overline{\omega}}{ds}-t\right)^2=q^2\sin^2\omega\cos^2\omega=-c\cos\overline{\omega}(c\cos\overline{\omega}+q) \tag{10}$$

en dérivant ensuite la relation (7) et éliminant ω et $d\omega/ds$ en utilisant (8) et (9), on obtient la relation suivante, cas particulier d'une équation donnée par Laguerre (formule 8 du tableau V des Leçons de Darboux):

$$\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds}+c\sin\overline{\omega}\left(2t-3\frac{d\overline{\omega}}{ds}\right)=\frac{c\cos\overline{\omega}}{q}\frac{dq}{ds}. \tag{11}$$

L'élimination de $d\overline{\omega}/ds$ entre (10) et (11) conduit à l'équation cherchée que nous écrivons provisoirement

$$F\left(\frac{dq}{ds}, q, \overline{\omega}, s\right) = 0. \tag{12}$$

Si l'on obtenait q et $\overline{\omega}$ comme solutions du système différentiel (11) et (12), on aurait, ω par la relation (7). On pourrait alors trouver les valeurs initiales $s_0, \overline{\omega}_0, q_0$, de façon que la valeur correspondante de dq/ds soit nulle:

$$F(0, q_0, \overline{\omega}_0, s_0) = 0. \tag{13}$$

Cette équation donne par exemple $\overline{\omega}_0$ une fois choisis q_0 et s_0; *par suite elle détermine les cylindres passant par* (Γ) *pour lesquels, en un point donné* s_0, *le cercle osculateur à la section droite a un rayon donné et un contact du second ordre avec la section.*

Pour que la courbe (Γ) soit située sur un cylindre de révolution de rayon $\boldsymbol{R}$, il faut et il suffit évidemment que $\overline{\omega}$ étant solution de

$$F(o, -1/\boldsymbol{R}, \overline{\omega}, s) = 0 \tag{14}$$

vérifie aussi l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de (11):

$$\cos\overline{\omega}\,\frac{dc}{ds} + c\sin\overline{\omega}\left(2t - \frac{3d\overline{\omega}}{ds}\right) = 0. \tag{15}$$

Nous simplifierons les formules qui vont suivre en supposant $\boldsymbol{R}=1$; on peut le faire sans diminuer la généralité, puisque cela revient à prendre pour unité de longueur le rayon du cylindre, ou encore à remplacer les variables anciennes

$$u, v, c, t, s$$

respectivement par

$$u' = u/\boldsymbol{R}, \quad v' = v/\boldsymbol{R}, \quad c' = \boldsymbol{R}c, \quad t' = \boldsymbol{R}t, \quad s' = s/\boldsymbol{R}$$

et à supprimer ensuite les accents; on a, maintenant $q = -1$.

Nous avons ainsi, en partant de (10),

$$\left(\frac{d\overline{\omega}}{ds}-t\right)^2=c\cos\overline{\omega}(1-c\cos\overline{\omega}) \tag{10'}$$

que nous transformons en la multipliant par $9c^2\sin^2\overline{\omega}$ et remplaçant $3c\sin\overline{\omega}\dfrac{d\overline{\omega}}{ds}$ par sa valeur tirée de (15). Il vient

$$\left(\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds}-ct\sin\overline{\omega}\right)^2-9c^3\sin^2\overline{\omega}\cos\overline{\omega}(1-c\cos\overline{\omega})=0; \tag{16}$$

c'est l'équation (14) pour $R=1$. On l'écrit encore, en prenant comme inconnue $\sigma=\operatorname{cotg}\overline{\omega}$

$$G(\sigma,c',c,t)=[(1+\sigma^2)(\sigma c'-ct)^2+9c^4\sigma^2]^2-81c^6\sigma^2(1+\sigma^2)=0, \tag{17}$$

$$\left(c'=\frac{dc}{ds}\right).$$

L'équation (15) nous donne

$$3c\frac{d\sigma}{ds}+(c'\sigma+2ct)(1+\sigma^2)=0. \tag{18}$$

Nous écrirons

$$G(\sigma,c',c,t)=A_0\sigma^8+A_1\sigma^7+\ldots+A_8=0 \tag{19}$$

les coefficients de ce polynôme sont fonctions composées de s par l'intermédiaire de c',c,t. Posons

$$\frac{dA_i}{ds}=\frac{\partial A_i}{\partial c'}c''+\frac{\partial A_i}{\partial c}c'+\frac{\partial A_i}{\partial t}t'.$$

La dérivée $d\sigma/ds$ d'une solution de (19) est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{ds}+\sum_{i=0}^{8}\frac{dA_i}{ds}\sigma^{8-i}=0.$$

Remplaçons $d\sigma/ds$ par sa valeur tirée de (18), on voit que σ vérifie encore l'équation du huitième degré

$$H(\sigma,c'',c',c,t',t)=3c\sum_{i=0}^{8}\frac{dA_i}{ds}\sigma^{8-i}-(1+\sigma^2)(c'\sigma+2ct)\frac{\partial G}{\partial\sigma}=0. \tag{20}$$

La relation cherchée est

$$R(c'',c',c,t',t)=0, \tag{21}$$

R désignant le résultant de G et H considérés comme polynômes en σ; il est superflu de donner ici l'expression explicite du polynôme en $c'',\dots,t$ qui constitue R.

4. Considérons deux équations du type (3)

$$R(c'''',c''',c'',c',c,t''',t'',t',t)=0 \qquad R_1(c'''',\dots,t)=0 \tag{22}$$

concernant respectivement deux surfaces (S), (S_1). Elles constituent un système d'équations différentielles où les fonctions inconnues sont c et t; la variable indépendante s ne figure pas dans ces équations. Un tel système détermine les intersections (Γ) des surfaces égales à (S) avec les surfaces égales à (S_1). Il peut se ramener, par un procédé classique, en prenant c comme variable indépendante à un système de 6 équations donnant c' et ses dérivées t et ses dérivées en fonction de c, système complété par une septième équation donnant par une quadrature s en fonction de c. La constante additive correspondante n'intervient pas dans la forme des courbes (Γ) qui dépendent bien en définitive, dans le cas général, de six constantes arbitraires.

Si les surfaces (S) (S_1) sont égales, les deux équations (22) ne sont plus distinctes. Mais on observe que la condition $R=0$ exprime que les 7 équations en $x,y,z,\ \alpha,\dots,\gamma'$

$$F=0,\ F'=0,\dots,\ F^{(6)}=0$$

ont un système de solutions communes (n° 1); pour qu'il existe deux systèmes de telles solutions (correspondant à deux positions distinctes de (Γ) sur la surface (S), une seconde condition doit être remplie; elle constitue avec $R=0$ le système d'équations différentielles cherchées. Par exemple, dans le cas du n° 3, on l'obtiendrait en écrivant que les deux équations (19) (20) en σ ont deux solutions communes.

Lorsque l'une au moins des surfaces (S) (S_1) admet les transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements, le nombre de constantes arbitraires dont dépendent les courbes

(Γ) est inférieur à six. C'est le cas par exemple des courbes définies par $R=0$, $t=0$, ou par l'équation unique

$$R(c'''', c''', c'', c', c, 0, 0, 0, 0) = 0 \tag{23}$$

correspondant aux sections planes de la surface (S) à laquelle correspond R; elles ne dépendent plus que de trois constantes arbitraires. Ce nombre se réduit encore pour les surfaces considérées aux nos 3 et 4; ainsi, pour un cylindre de révolution, l'équation (23) est du second ordre

$$R(c'', c', c, 0, 0) = 0. \tag{24}$$

La forme des sections planes considérées (ellipses dont le demi petit axe a une longueur donnée $R=1$), ne dépend plus que d'un paramètre. On ramènerait (24) à une équation du premier ordre en prenant c comme variable indépendante, mais les calculs du n° 3 donnent très simplement l'intégrale de cette équation différentielle; on part de l'équation (15), où l'on fait $t=0$:

$$\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds} - 3c\sin\overline{\omega}\frac{d\overline{\omega}}{ds} = 0,$$

les variables se séparent; on a par suite, k désignant une constante

$$c\cos^3\overline{\omega} = k^3, \qquad \cos\overline{\omega} = kc^{-\frac{1}{3}};$$

la relation (7) s'écrit, puisque $q=-1$, $c\cos\overline{\omega}=\cos^2\omega$ et

$$\cos^2\omega = kc^{\frac{2}{3}}, \qquad \sin^2\omega = 1 - kc^{\frac{2}{3}}.$$

On porte ces expressions des sinus et cosinus dans l'équation (9) correspondant à $t=0$, $q=-1$, ce qui donne

$$\frac{d\cos\overline{\omega}}{ds} = \sin\overline{\omega}\cos\omega\sin\omega$$

et enfin

$$c' = \frac{dc}{ds} = -3c^{\frac{4}{3}}(k^{-1} - c^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{2}{3}} - k^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

L'équation intrinsèque des ellipses considérées peut s'écrire en exprimant l'arc s en fonction de $u=c^{\frac{2}{3}}$, c étant la courbure; cette expression est une intégrale elliptique

$$s=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{u(k^{-1}-u)(u-k^2)}}.$$

On peut évidemment obtenir cette même équation en partant de la représentation paramétrique classique

$$X=a\cos\varphi \qquad Y=\sin\varphi$$

et trouver ainsi $k=a^{-\frac{2}{3}}$ ou encore $\cos^{\frac{2}{3}}\theta$ en appelant θ l'angle du plan de l'ellipse et d'un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre de révolution.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DU TYPE DE DINI

Par J. MARCINKIEWICZ, Wilno

1. Soit donnée une fonction $F(x)$ de période 2π. Posons

$$\Delta(F,x,h)=\Delta(x,h)=F(x+h)+F(x-h)-2F(x). \tag{1.1}$$

Lorsque la fonction F admet une dérivée f assez régulière, par exemple lorsque f vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif, on a pour tout x

$$\int_0^{2\pi}|\Delta(x,t)|^r t^{-r-1}dt<\infty, \quad r\geqslant 1. \tag{1.2}$$

Au contraire, si l'on suppose seulement l'existence de la dérivée $f(x)$ dans un point particulier, l'intégrale (1.2) peut être divergente en ce point. Cependant on a le

Théorème 1. *Soit F continue, dérivable dans un ensemble E de mesure positive. L'intégrale* (1.2) *existe pour tout $r\geqslant 2$ presque partout dans E. Pour $r<2$, le théorème tombe en défaut.*

Supposons que la fonction F est absolument continue et que sa dérivée $f\epsilon L^q$ $(q\geqslant 2)$. D'après le théorème 1 l'intégrale (1.2) avec $r=q$ définit une fonction de x. On peut demander quel est l'ordre de grandeur de la fonction ainsi définie. On y a le

Théorème 2. *Lorsque F est absolument continue et $F'=f\epsilon L^q$, on a*

$$\int_0^{2\pi}\int^{2\pi}|\Delta(x,t)|^q t^{-q-1}dt\leqslant C_q\int_0^{2\pi}|f|^q dt. \tag{1.3}$$

On a aussi un théorème réciproque dans un sens au théorème 2:

Théorème 3. *Soit F une fonction absolument continue $F(0)=F(2\pi)$, $1<p\leqslant 2$, $f=F'$. On a*

$$(1.4)\qquad \int_0^{2\pi} |f|^p dx \leqslant C_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dx\, dt.$$

2. Nous commençons par la démonstration du

Lemme 1. *Les théorèmes 1, 2, 3 sont vrais lorsque F est absolument continue, $F(0)=F(2\pi)$, $F'\,\varepsilon L^2$ et $r=2$.*

Posons

$$F'(x)=f(x)=\sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

On a

$$\Delta(x,t)=-4\sum_1^\infty \left(\frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}\right)\sin^2\frac{kt}{2}.$$

L'égalité de Parcéval donne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2(x,t)\,dx = 16\sum_1^\infty (a_k^2+b_k^2)\,\frac{\sin^4 kt/2}{k^2}.$$

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par t^{-3} et en intégrant dans l'intervalle, $(0,2\pi)$ on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^3(x,t)\,t^{-3}\,dx\,dt = 16\sum_1^\infty (a_k^2+b_k^2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4 kt/2}{k^2 t^3}\,dt,$$

ce qui implique le résultat demandé.

3. Dans une autre note [1]) j'ai démontré le

Lemme 2. *Soit F une fonction continue, dérivable dans un ensemble E de mesure positive. Pour tout $\varepsilon>0$ on peut définir un ensemble $Q\subset E$ et deux fonctions $G(x)$ et $H(x)$ de période 2π de sorte que l'on ait*

---

[1]) Marcinkiewicz 2.

$$(3.1)\qquad |E-Q|<\varepsilon,$$

$$(3.2)\qquad G(0)=G(2\pi),\qquad G(x)=\int_0^x g(x)dx,\qquad g\epsilon L^2,$$

$$(3.3)\qquad G(x)=F(x),\qquad (x\epsilon Q),$$

$$(3.4)\qquad F(x)=G(x)+H(x),$$

et enfin pour presque tout $x\epsilon Q$

$$(3.5)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|H(x+t)|t^{-2}dt<\infty.$$

4. Nous allons démontrer le théorème 1 avec $r=2$. Fixons ε positif et considérons l'ensemble Q et les fonctions G et H satisfaisant aux conditions (3.1)–(3.5). En tenant compte de (3.2) et du lemme 1, on conclut que l'intégrale

$$(4.1)\qquad \int_0^{2\pi}\Delta^2(G,x,t)t^{-3}dt$$

existe presque partout dans l'intervalle $(0,2\pi)$. D'autre part, les formules (3.3) et (3.4) montrent qu'on a presque partout dans Q

$$H(x)=0,\qquad H'(x)=0,$$

ce qui montre en vertu de (3.5) que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}H^2(x+t)t^{-3}dt$$

existe presque partout dans Q. Or, l'existence de la dernière intégrale implique évidemment

$$(4.2)\qquad \int_0^{2\pi}\Delta^2(H,x,t)t^{-3}dt<\infty.$$

En tenant compte de (4.1) et (4.2), on conclut facilement qu'on a presque partout dans Q

$$(4.3)\qquad \int_0^{2\pi}\Delta^2(F,x,t)t^{-3}dt<\infty.$$

Or, ε étant arbitraire, il s'ensuit d'après (3.1) que l'inégalité (4.3) subsiste presque partout dans l'ensemble E.

Remarquons enfin que l'inégalité (4.3) entraîne (1.2) avec $r \geqslant 2$ dès que la fonction F admet une dérivée finie.

5. Pour démontrer la partie négative du théorème 1, posons

$$a_n = 1/\sqrt{n}\log n.$$

On a

$$\sum a_n^2 < \infty, \qquad \sum a_n^p = \infty, \qquad 1 \leqslant p < 2. \tag{5.1}$$

Soit

$$f(x) = \sum_2^\infty a_n \cos n!x, \qquad F(x) = \sum_2^\infty \frac{a_n}{n!} \sin n!x. \tag{5.2}$$

D'après (5.1) on a $f \in L^2$. D'autre part

$$\Delta(F,x,t) = -4\sum \frac{a_n}{n!} \sin n!x \sin^2 n!\frac{t}{2} \tag{5.3}$$

$$|\tfrac{1}{4}\Delta(x,t)| \geqslant \frac{a_m}{m!}\,|\sin m!x| \sin^2 m!\frac{t}{2} - \sum_2^{m-1} \frac{a_m}{n!}\,|\sin n!x| \sin^2 n!\,\frac{t}{2}$$

$$-\sum_{m+1}^\infty \frac{a_n}{n!}|\sin n!x| = A_m - B_m - C_m$$

$$3|\Delta|^p \geqslant A_m^p - 3B_m^p - 3C_m^p$$

$$\int_0^{2\pi} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dt \geqslant \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dt \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{3}\sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} A_m^p t^{-p-1} dt - \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} B_m^p t^{-p-1} dt$$

$$-\sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} C_m^p t^{-p-1} dt = \sum_m \{I_1^{(m)} - I_2^{(m)} - I_3^{(m)}\}.$$

On a

$$I_1^{(m)} = \frac{1}{3m!^p}\,|\sin m!x|^p a_m^p \int_{1/m!}^{2/m!} \sin^{2p} m!\frac{t}{2}\, t^{-p-1} dt \geqslant \tfrac{1}{3}\lambda a_m^p |\sin m!x|^2 \tag{5.4}$$

où

$$\lambda = \int_{1/2}^{1} \sin^{2p} t\, t^{-3}\, dt.$$

Or, comme

$$I_2 \leqslant 4 \left\{\frac{(m-1)!}{\sqrt{m}}\right\}^p \int_{1/m!}^{2/m!} t^{-1+p}\, dt$$

ou bien

(5.5) $$I_2 \leqslant 4m^{-3/2}$$

et

(5.6) $$I_3 \leqslant \int_{1/m!}^{2/m!} \left[\frac{4}{\sqrt{m}\,(m+1)!}\right]^p t^{-p-1}\, dt \leqslant cm^{-3/2}.$$

Les inégalités (5.4), (5.5) et (5.6) donnent

$$\int_0^{2\pi} \Delta^p(x,t)\, t^{-p-1}\, dt \geqslant \sum_m \lambda \sin^2 m!\, x\, a_m^p - C \sum_m m^{-3/2}$$

et tout revient à démontrer que l'on a presque partout

(5.7) $$\sum a_m^p \sin^2 m!\, x = \infty,$$

ce qui résulte facilement de l'inégalité (5.1) et du fait bien connu [2]) qu'une série

$$\sum c_\nu \cos \lambda_\nu x, \qquad \lambda_{\nu+1}/\lambda_\nu > 2, \qquad \sum c_\nu^2 < \infty$$

converge presque partout.

6. Le théorème 2 est une conséquence facile du théorème sur la convexité des normes des opérations linéaires de M. M. Riesz [2bis]). L'expression $U(f,x,h) = \Delta(F,x,h)h^{-1}$, $(F' = f)$, considérée pour $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant h < 2\pi$, est une opération linéaire. D'après le lemme 1, on voit que

(6.1) $$\left[\int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi} u^2(f,x,t)\, dx\, d\log t^{-1}\right]^{1/2} \leqslant C_2 \left[\int_0^{2\pi} f^2 dx\right]^{1/2}$$

avec C_2 indépendant de ε.

---

[2]) Zygmund 5, [2bis]) Riesz 3.

D'autre part, lorsque la fonction f est bornée, la fonction U l'est aussi et on a

$$(6.2)\qquad \lim_{r\to\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi}|U^r(f,x,t)|\,dx\,d\log t^{-1}\right\}^{1/r}\leqslant 2\max|f|.$$

L'opération U étant définie pour $f\epsilon L^2$ et $f\epsilon L^\infty$, elle peut être aussi définie pour tout r, $2\leqslant r\leqslant\infty$. On a donc

$$(6.3)\qquad \int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi}U^r(f,x,t)\,t^{-r-1}\,dx\,dt\leqslant C_r\int_0^1|f|^r dx.$$

C_r étant indépendant de ε, on en déduit le résultat demandé.

7. La démonstration du théorème 3 est basée sur le suivant

Lemme 3. Soient

$$(7.1)\qquad \begin{aligned} &f=\sum_1^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\qquad f\epsilon L^p,\qquad p>1.\\ &\Delta_\nu(f,x)=\Delta_\nu(x)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}(a_i\cos ix+b_i\sin ix).\end{aligned}$$

On a

$$(7.2)\qquad A_p\int_0^{2\pi}(\sum_\nu\Delta_\nu^2)^{p/2}dx\leqslant\int_0^1|f|^p dx\leqslant B_p\int_0^{2\pi}(\sum_\nu\Delta_\nu^2)^{p/2}$$

Ce résultat est connu, il est dû à MM. J. Littlewood et R. Paley [3]).

Nous utilisons encore le

Lemme 4. On a pour tout polynôme trigonometrique S d'ordre n au plus

$$(7.3)\qquad \int_0^{2\pi}|S'|^p dx\leqslant n^p\int_0^{2\pi}|S|^p dx.$$

Ce lemme est aussi connu, il est dû à M. A. Zygmund [4]).

Enfin nous appliquons le

---

[3]) Littlewood et Paley 1.

[4]) Zygmund 6.

Lemme 5. Soit

$$f(x)=a_0/2+\sum_1^\infty (a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$s_n=a_0/2+\sum_1^n (a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$f\in L^p,\qquad p>1.$$

On a

$$\int_0^{2\pi} |S_n|^p dx \leqslant A_p \int_0^{2\pi} |f|^p dx. \tag{7.4}$$

Ce résultat est dû à M. M. RIESZ [5]).

8. Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.

D'après le lemme 3, on a

$$\int_0^{2\pi} \Delta^p(F,x,t)dx \geqslant \int_0^{2\pi} (\Sigma\Delta_\nu^2(\Delta,x,t))^{p/2} dx$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^p(F,x,t)t^{-p-1} \geqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Sigma\Delta_\nu^2)^{p/2} dx\,dt \geqslant$$

$$\sum_\nu \int_0^{2\pi} dx \int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu}} \Delta_\nu^p t^{-p-1} dx\,dt$$

ou bien

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^p(F,x,t)t^{-p-1} dx\,dt \geqslant \int_0^{2\pi} dx\, \Sigma 2^p \int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu}} \Delta_\nu^p(\Delta,x,\theta_\nu), \tag{8.1}$$

où

$$2^{-\nu-1} \leqslant \theta_\nu \leqslant 2^{-\nu}.$$

On a

$$\Delta_\nu(\Delta,x,\theta_\nu)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{a_\mu \sin\mu x - b_\mu\cos\mu x}{\mu} \sin^2\mu\frac{\theta_\mu}{2}.$$

Lorsque μ croît de 2^ν jusqu'à $2^{\nu+1}$, l'expression $\mu\theta_\nu/2$ croît aussi de $2^{\nu-1}\theta_\nu$ jusqu'à $2^\nu\theta_\nu$ et l'on a

$$\tfrac{1}{4} \leqslant \mu\theta_\nu \leqslant 1.$$

---

[5]) Riesz 4.

Posons $\sin^2 \mu\theta_\nu/2 = \lambda_\mu$. La suite λ_μ est donc croissante et l'on a pour $2^\nu \leqslant \mu \leqslant 2^{\nu+1}$, $\sin^2 \frac{1}{4} \leqslant \lambda_\mu \leqslant \sin^2 1$.

Posons

$$\sum_{2^\nu}^{n} \frac{a_\mu \sin \mu x - b_\mu \cos \mu x}{\mu} \lambda_\mu = s_n; \quad \sum_{2^\nu}^{n} \frac{a_\mu \sin \mu x - b_\mu \cos \mu x}{\mu} = \sigma_n.$$

En appliquant la transformation d'Abel et l'inégalité de Minkowski, on trouve

$$\sigma_{2^{\nu+1}-1} = \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} s_\mu \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_{\mu+1}}\right) + S_{2^{\nu+1}-1}/\lambda_{2^{\nu+1}-1}$$

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_{2^{\nu+1}-1}|^p dx \leqslant \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_{\mu+1}}\right) \left\{\int_0^{2\pi} |s_\mu|^p \, dx\right\}^{1/p} +$$

$$+ \lambda_{2^{\nu+1}-1}^{-1} \left\{\int_0^{2\pi} |s_{2^{\nu+1}-1}|^p dx\right\}^{1/p}.$$

L'inégalité (7.4) donne

$$\left[\int_0^1 |s_\mu|^p dx\right]^{1/p} \leqslant A_p \left\{\int_0^1 |\Delta_\nu|^p dx\right\}^{1/p},$$

ce qui porté dans (8.1) donne

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^p(F, x, t) t^{-p-1} dt \geqslant A \Sigma 2^{\nu p} \int_0^{2\pi} |\sigma_{2^{\nu+1}-1}|^p dx, \tag{8.2}$$

où A désigne une constante positive. D'autre part, l'inégalité (7.3) donne

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_\nu(f, x)|^p dx \leqslant 2^{(\nu+1)p} \int_0^1 |\sigma_{2^\nu-1-1}|^p dx,$$

ou bien en vertu de (8.2)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta(F, x, t)^p t^{-p-1} dx\, dt \geqslant A \sum \int_0^{2\pi} |\Delta_\nu^p| dx \geqslant A \int_0^{2\pi} (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} dx,$$

ce qui, d'après (7.2), achève la démonstration du théorème 3.

9. Il est très probable que le théorème suivant subsiste. Soit $F(x)$ absolument continue, $F(0)=F(2\pi)$, $F'=f$. Posons

$$g^2(x)=\int_0^{2\pi} \Delta^2(F,x,t)t^{-3}dt.$$

On a pour tout $p>1$

$$A_p\int_0^{2\pi} g^p dx\leqslant\int_0^{2\pi}|f|^p dx\leqslant B_p\int_0^{2\pi} g^p dx.$$

Si ce théorème est vrai, sa démonstration est probablement beaucoup plus difficile.

TRAVAUX CITÉS.

1. J. Littlewood et R. Paley, *Theorems on Fourier series and power series I*, Journ. Lond. Math. Soc. 6 (1931), p. 320-233., II Proc. Lond. Math. Soc. 42 (1936), p. 52-85, III Proc. Lond. Math. Soc. 43 (1937), p. 105-126.

2. J. Marcinkiewicz, *On the convergence of Fourier Series*, Journ. Lond. Math. Soc. 10 (1935), p. 264-268.

3. M. Riesz, *Sur les maximas des formes billinéaires*, Acta Math. 49 (1926), p. 465-497.

4. M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeit 27 (1927), p. 218-244.

5. A. Zygmund, *On the convergence of lacunary trigonometric series*, Fund. Math. 16 (1930), p. 90-107.

6. A. Zygmund, *A remark on conjugate series*, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), p. 392-400.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES SÉRIES ORTHOGONALES LACUNAIRES

Par J. MARCINKIEWICZ, Wilno

1. Dans une note récente [1]) j'ai démontré le

Théorème 1. *Soit* $\{\varphi_n\}$ *un système orthogonal et normal dans l'intervalle* (0,1) *vérifiant la condition*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\, dx > 0. \tag{1.1}$$

Il existe une suite $\{n_i\}$ *telle que la convergence presque partout d'une série de la forme*

$$\sum_i a_i \varphi_{n_i}(x) \tag{1.2}$$

équivaut à l'inégalité

$$\sum a_i^2 < \infty. \tag{1.3}$$

Dans une autre note [2]) j'ai amélioré une partie de ce théorème en démontrant le

Théorème 2. *Sous la condition* (1.1) *il existe une suite* $\{n_i\}$ *telle que la relation*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_1^{n_\nu} a_i \varphi_{n_i}(x) > -\infty \tag{1.4}$$

verifiée presque partout entraîne (1.3).

---

[1]) Marcinkiewicz 2, *cf.* aussi Marcinkiewicz 3 et Menchoff 5 et 6.
[2]) Marcinkiewicz 4.

La démonstration que j'ai donné pour ces théorèmes est très longue. Le but de cette note est de les démontrer d'une façon plus courte et plus simple. Ma nouvelle démonstration sera basée sur le

Théorème 3. *Sous la condition* (1.1) *il existe une suite* $\{n_i\}$ *telle que l'on a pour des nombres* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *arbitraires*

$$A\Big(\sum_1^n a_n^2\Big)^{p/2} \leqslant \int_0^1 \Big|\sum_1^n a_\nu \varphi_{n_\nu}(x)\Big|^p dx \leqslant \Big(\sum_1^n a_\nu^2\Big)^{p/2} \quad (0<p\leqslant 2), \tag{1.5}$$

où A *désigne une constante positive* [3].

2. ***Lemme 1.*** *Soient* $\{\omega_\nu\}$ *le système orthogonal et normal de M. Walsh* [4]*,* $\{n_i\}$ *une suite de nombres entiers telle que*

$$n_{i+1}/n_i \geqslant 2 \tag{2.1}$$

et f

$$f = \sum c_\nu \omega_\nu \tag{2.2}$$

une fonction de la classe L^p $(p>1)$.

La série

$$\sum_\nu \Delta_\nu; \quad \Delta_\nu = \sum_{2^\nu - 1}^{2^{\nu+1}} c_\mu \omega_\mu \tag{2.3}$$

converge presque partout et on a l'inégalité

$$A_p \int_0^1 (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} dx \leqslant \int_0^1 |f|^p dx \leqslant B_p \int_0^1 (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} \tag{2.4}$$

où $A_p > A$ *dès que* $\frac{3}{2} \leqslant p \leqslant 2$.

Ce résultat est connu, il est dû à R. Paley [5].

3. ***Lemme 2.*** *Soit*

$$\int_0^1 |\psi_\nu|\, dx > \Delta, \quad \int_0^1 \psi_\nu^2 dx < 1. \tag{3.1}$$

---

[3]) Une inégalité analogue pour $p \geqslant 2$ a été considerée par M. S. Banach. Voir Banach 1.

[4]) Walsh 8. [5]) Paley 7.

On a pour toute suite $\{a_\nu\}$ *et tout* $p \leqslant 2$

$$(3.2) \qquad (\sum a_\nu^2)^{p/2} \leqslant 4\Delta^{-2}\int_0^1 (\Sigma a_\nu^2 \psi_\nu^2)^{p/2}.$$

Nous pouvons supposer évidemment $\sum a_\nu^2 = 1$. Posons $\sigma^2 = \sum a_\nu^2 \psi_\nu^2$ et désignons par A et B les ensembles dans lesquels on a réspectivement $\sigma \geqslant 1$ et $\sigma \leqslant 1$. On a tantôt $|A| \geqslant \Delta^2/4$ tantôt $|A| \leqslant \Delta^2/4$. Le premier cas est banal. Dans le deuxième on a

$$\int_0^1 |\psi_\nu|\, dx \leqslant \Big\{\int_B \psi_\nu^2\, dx\Big\}^{1/2} + |A|^{1/2},$$

d'où l'on déduit

$$\int_B \psi_\nu^2\, dx \geqslant \Delta^2/4,$$

$$\int_0^1 \sigma^{p/2} dx \geqslant \int_B \sigma^{p/2} dx \geqslant \int_B \sigma^2 dx \geqslant \sum a_\nu^2 \int_B \psi_\nu^2 dx \geqslant \Delta^2/4,$$

ce qui démontre le lemme.

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 3. En changeant les notations, on peut admettre que l'on a

$$(3.3) \qquad \int_0^1 |\varphi_\nu|\, dx \geqslant 2\Delta.$$

Soit

$$\varphi_\nu = \sum a_{\nu,\mu}\, \omega_\mu.$$

Posons $m_0 = 0$, $n_1 = 1$ et désignons par m_1 un nombre satisfaisant à la condition

$$(3.4) \qquad \sum_{n_1}^{\infty} a_{1,\mu}^2 \leqslant \Delta^4/4.$$

Supposons $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ définis. Choisissons pour n_{k+1} un nombre assez grand pour que l'on ait

$$(3.5) \qquad \sum_1^{m_k} |a_{n_{k+1},\mu}| < [A_p \Delta^2]^{2/p}/4^k, \qquad n_{k+1} > n_k$$

et ensuite pour m_{k+1} un nombre satisfaisant aux inégalités

$$(3.6) \qquad m_{k+1} > 2m_k; \qquad \sum_{m_{k+1}}^{\infty} a_{n_{k+1},\mu}^2 \leqslant [A_p \Delta^2]^{2/p}/4^{k+1}.$$

On a

$$\varphi_{n_\nu}(x)=\sum_{1}^{m_{\nu-1}} a_{n_\nu,\mu}\,\omega_\mu+\sum_{m_{\nu-1}+1}^{m_\nu} a_{n_\nu,\mu}\,\omega_\mu+\sum_{m_\nu+1}^{\infty} a_{n_\nu,\mu}\,\omega_\mu=\varepsilon_\nu+\psi_\nu+\varrho_\nu,$$

où

$$(3.7)\qquad |\varepsilon_\nu|\leqslant\frac{A\Delta^2}{16}2^{-\nu};\qquad \int_0^1\varrho_\nu^2dx\leqslant\Delta^2 4^{-\nu};\qquad \int_0^1|\psi_\nu|dx>\Delta.$$

Soit $^3/_2\leqslant p\leqslant 2$. On a

$$\Big\{\int_0^1\Big|\sum_1^n a_\nu\varphi_{n_\nu}\Big|^p dx\Big\}^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant\Big\{\int_0^1\Big|\sum_1^n a_\nu\psi_\nu\Big|^p dx\Big\}^{1/p}-\Big\{\int_0^1\Big|\sum_1^n a_\nu\varepsilon_\nu\Big|^p dx\Big\}^{1/p}-\Big\{\int_0^1\Big|\sum_1^n a_\nu\varrho_\nu\Big|^p dx\Big\}^{1/p}=I_1-I_2-I_3.$$

D'après (2.4) et (3.2), on a $I_1^p\geqslant\frac{1}{4}A_p\Delta^2 s^{p/2}$ où $s=\sum a_\nu^2$. L'inégalité (3.7) donne $I_2\leqslant[A_p\Delta^2]^{1/p}s^{1/2}/16$ et $I_3^p\leqslant A_p\Delta^2 s^{p/2}/16$, ce qui entraîne

$$\Big\{\int_0^1\Big|\sum a_i\varphi_{n_i}\Big|^p dx\Big\}^{1/p}\geqslant cs^{1/2}.$$

Le théorème se trouve démontré pour $\frac{3}{2}\leqslant p\leqslant 2$. Soit donc $p<\frac{3}{2}$. Désignons par A et B les ensembles où $\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2(x)\geqslant 1$ et $\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2(x)\leqslant 1$. Lorsque $|A|>\mu$, on a $\int_0^1\sigma^{p/2}dx\geqslant\mu$ $(\sigma=\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2)$. Dans le cas contraire, on trouve

$$\int_0^1\sigma^{3/4}dx=\int_A+\int_B\leqslant\mu^{1/4}+\int_B\sigma^{p/2}dx;\qquad \int_0^1\sigma^{3/4}dx\geqslant C,$$

d'où

$$\int_0^1\sigma^{p/2}dx\geqslant C-\mu^{1/4}\geqslant c/2$$

et il en vient dans tous les cas

$$\int_0^1\sigma^{p/2}dx\geqslant c/2.$$

L'inégalité $\int_0^1 \sigma^{p/2} dx \leqslant 1$ étant évidente, il en résulte le théorème. En s'appuyant sur ce résultat, on peut démontrer le

Théorème 4. *Sous la condition* (1.1), *on peut choisir une suite* $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *telle que l'on ait pour toute suite* $\{a_i\}$ *et tout ensemble* A, $|A|>1-\varepsilon_p$

$$\int_A |\sum a_i \varphi_{n_i}|^p dx \geqslant C_p (\sum a_\nu^2)^{p/2}. \tag{3.8}$$

En effet, en supposant l'inégalité (1.4), on a

$$\int_A |\sum a_i \varphi_{n_i}|^p dx = \int_0^1 - \int_{CA} \geqslant A_p (\sum a_i^2) - |CA|^{2-p/p} (\sum a_i^2)^{p/2}.$$

4. Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 2. Soient $\{\varphi_{n_i}\}$ les fonctions choisies dans le théorème 3. Supposons (1.4) verifiée et

$$\sum a_i^2 = \infty.$$

Il existe un nombre M tel que la relation

$$\sum_1^\nu a_i \varphi_{n_i}(x) > -M \qquad \nu = 1, 2, ..$$

est vérifiée dans un ensemble E, $|CE| < \varepsilon_1$, ε_1 étant le même que dans le théorème 4. On a [6])

$$\int_E |S_\nu| dx \leqslant \int_E |S_\nu + M| + M \leqslant \int_E S_\nu + 2M = 2M + \sum_1^\nu a_i \xi_i$$

où $S_\nu = \sum_1^\nu a_i \varphi_{n_i}$, $\xi_i = \int_E \varphi_{n_i}(x)\, dx$.

Or, de la relation $\sum \xi_i^2 \leqslant 1$ on conclut facilement que

$$\int_E |S_\nu|\, dx = O(\sum_1^\nu a_i^2)^{1/2},$$

ce qui est en contradiction avec (3.8).

---

[6]) Comparer Zygmund 9.

Le théorème 1 résulte du théorème 2 et du lemme 1. En effet, le théorème 2 montre que (1.2) entraîne (1.3). D'autre part, posons comme dans le lemme 2 $\varphi_{n_\nu} = \varepsilon_\nu + \psi_\nu + \varrho_\nu$. L'inégalité (1.3) entraîne

$$\sum a_i \varphi_{n_i} \epsilon L^2,$$

d'où résulte d'après le lemme 1 la convergence presque partout de la série

$$\sum a_\nu \psi_\nu.$$

La convergence de la série $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ étant évidente, il reste à démontrer la convergence de la série $\sum a_\nu \varrho_\nu$, mais elle résulte immediatement de la relation

$$\sum \int_0^1 |a_\nu \varrho_\nu| \, dx < \infty.$$

TRAVAUX CITÉS.

1. S. Banach, *Sur les séries lacunaires*, Bull. Ac. Pol. 1933, p. 149-154.

2. J. Marcinkiewicz, *Sur les séries lacunaires*, Stud. Math. 8.

3. J. Marcinkiewicz, *Sur la convergence de séries orthogonales*, Stud. Math. 6 (1936), p. 39-45.

4. J. Marcinkiewicz, *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, Ann. Soc. Math. Pol. 16 (1937), p. 84-96.

5. A. Menchoff, *Sur la convergence et la sommation des séries orthogonales*, Bull. Soc. Math. France 64 (1937), p. 1-24.

6. A. Menchoff, *Sur la sommation des série othogonales par les méthodes linéaires* (en russe) Bull. Ac. Sc. U. R. S. S. (1937), p. 203-229.

7. R. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions I*, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), p. 241-264.

8. J. Walsh, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. 69 (1910), p. 331-371.

9. A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series*, Trans. Americ. Math. Soc. 34 (1932), p. 435-446.

BINÄRE MATRIZENFORMELN FÜR DIE CLIFFORD-ZAHLEN [1])

VON DUWID WAJNSZTEJN, Kraków

1. Wie bewusst gibt es binäre (komplexe) Matrizen, die als Formerln für die Quaternionen gelten dürfen [2]). Es entsteht die Frage:

Darf man für die Clifford-Zahlen mit 2^n Einheiten binäre Matrizenformeln im Gebiet der Clifford-Zahlen mit 2^{n-1} Einheiten bauen?

Dieser Frage, *die zu bejahen ist*, widmen wir die Note. In unseren Erwägungen benützen wir die Resultate aus unseren Noten:

[I] *Über die Clifford-Lipschitzschen hyperkomplexen Zahlensysteme* [3]).

[II] *a-Matrizen und Clifford-Zahlen* [4]).

Diese Noten werden im weiteren mit den Zeichen [I] bzw. [II] zittiert sein. Wir behalten alle Bezeichnungen aus diesen Noten.

2. In [I]. § 4. haben wir einen hyperkomplexen Zahlensystem mit 2^n Einheiten

(1) $$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{2^n}$$

untersucht.

Statt der Einheiten (1) darf man 2^n Clifford-Zahlen

(2) $$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2^n}$$

---

[1]) Diese Note wurde im Seminär des Herrn Prof. Dr W. Wilkosz verfertigt.

[2]) F. Klein: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jhd.* I. S. 190.

[3]) Annales de la Société Polonaise de Mathématique T. XVI [1937], S. 65-83.

[4]) Ann. de la Soc. Pol. de Math. T. XVI [1937], S. 162-175.

als Grundeinheiten wählen [5]), wo

$$(3)\qquad \begin{aligned} \eta_1 &= a_{1,1} E_1 + a_{1,2} E_2 + \dots + a_{1,2^n} E_{2^n} \\ \eta_2 &= a_{2,1} E_1 + a_{2,2} E_2 + \dots + a_{2,2^n} E_{2^n} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_{2^n} &= a_{2^n,1} E_1 + a_{2^n,2} E_2 + \dots + a_{2^n,2^n} E_{2^n} \end{aligned}$$

(a_{ik} reell) mit der Bedingung:

$$(4)\qquad \operatorname{Det} \|a_{i,k}\| \neq 0.$$

Auf Grund der Multiplikationstafel [I] (30) und der Formel [I] (47) haben wir

$$E_i^2 = \pm E_1.$$

Wir wählen als neue Grundeinheiten (2) die Clifford-Zahlen

$$(5)\qquad \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \dots, \mathfrak{e}_{2^n}$$

für welche die Zahlen a_{ik} aus (3) durch die Formeln

$$a_{i,k} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

$$a_{ii} = \begin{cases} +1 & \text{für } E_i^2 = E_1 \\ -1 & \text{für } E_i^2 = -E_1 \end{cases}$$

bestimmt sind.

Wir haben die Formel

$$(7)\qquad \mathfrak{e}_i = E_i^3.$$

Man sieht leicht ein, dass man für die Einheiten (5) eine Multiplikationstafel auf folgender Weise erhält:

Man bildet eine α-Matrix $\mathfrak{E}$, die in der ersten Kolonne die Einheiten (5) besitzt. Links der Matrix schreiben wir die erste Kolonne und über der Matrix schreiben wir die erste Zeile, so erhalten wir eine Multiplikationstafel für die Einheiten (5):

$$(8)\qquad \begin{array}{c|cccc} & \mathfrak{e}_1 & -\mathfrak{e}_2 & \dots & -\mathfrak{e}_{2^n} \\ \hline \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_1 & -\mathfrak{e}_2 & \dots & -\mathfrak{e}_{2^n} \\ \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_1 & \dots & \mathfrak{e}_{2^n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{e}_{2^n} & \mathfrak{e}_{2^n} & -\mathfrak{e}_{2^n-1} & \dots & \mathfrak{e}_1 \end{array}$$

[5]) S. Zaremba: *Arytmetyka teoretyczna*, S. 746.

Der Zahl

(9) $$z = a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2 + \ldots + a_{2^n}\mathfrak{e}_{2^n}$$

entspricht die a-Matrix, die in der ersten *Kolonne* die Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n}$$

besitzt.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, dass bei Clifford-Zahlen mit vier Einheiten (also bei Quaternionen) der Isomorphismus

(10) $$\mathfrak{e}_1 \sim 1, \quad \mathfrak{e}_2 \sim i, \quad \mathfrak{e}_3 \sim j, \quad \mathfrak{e}_4 \sim k$$

gilt.

Wir haben die Gleichheit

(11) $$\mathfrak{E} = \mathcal{E}^*$$

wo $\mathcal{E}^*$ die zu $\mathcal{E}$ transponierte Matrix ist. $\mathcal{E}$ ist es die Matrix, welche unter und rechts der Geraden in [I] (30) steht. (Man vergleiche [II]. 6.).

3. Aus (7) haben wir

$$\mathfrak{e}_l^2 = E_l^6 = E_l^4 E_l^2 = E_1 E_l^2 = E_l^2.$$

Die a-Matrix welche der Zahl (9) zugeordnet ist hat die Form

$$\| a_1 \cdot a_{1,1}, a_2 \cdot a_{2,2}, \ldots, a_{2^n} \cdot a_{2^n,2^n} \|$$

wo $a_{l,l}$ dieselbe Bedeutung was in (6) hat.

In Zusammenhang mit unseren Erwägungen aus [II] § 3. 14. werden wir eine der Zahl (9) *adjungierte* hyperkomplexe Clifford-zahl einführen. Diese Zahl bezeichnen wir mit z_* und erklären sie durch die Formel

(12) $$\begin{aligned} z_* &= a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2 + \ldots + \\ &+ a_{2^{n-1}}\mathfrak{e}_{2^{n-1}} - a_{2^{n-1}+1}\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} - a_{2^{n-1}+2}\mathfrak{e}_{2^{n-1}+2} - \ldots - a_{2^n}\mathfrak{e}_{2^n}. \end{aligned}$$

Der Überlegung aus [II] § 3 nach, gelten die Formeln

(13) $$z_*^{(1)} + z_*^{(2)} = (z^{(1)} + z^{(2)})_*$$

(14) $$z_*^{(1)} \cdot z_*^{(2)} = (z^{(1)} \cdot z^{(2)})_*$$

wo $(z^{(1)} + z^{(2)})_*$ bzw. $(z^{(1)} z^{(2)})_*$ die der Zahlen $z^{(1)} + z^{(2)}$ bzw. $z^{(1)} \cdot z^{(2)}$ adjungierte Clifford-Zahlen bezeichnen.

4. Wir beweisen den

Hauptsatz: *Bezeichnen wir mit*

(9.a) $$z_1 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{2^{n-1}} \mathbf{e}_{2^{n-1}}$$

(9.b) $$z_2 = a_{2^{n-1}+1} \mathbf{e}_1 + a_{2^{n-1}+2} \mathbf{e}_2 + \ldots + a_{2^n} \mathbf{e}_{2^{n-1}}$$

und bilden die binäre Matrix

(15) $$\mathfrak{Z} = \begin{Vmatrix} (z_1)_* & (z_2)_* \\ -z_2 & z_1 \end{Vmatrix}$$

so gibt es ein Isomorphismus zwischen den Zahlen (9) *und den Matrizen* (15).

5. Wir beweisen, dass *die Matrizen* (15) *ein hyperkomplexes System bilden.*

In der Tat (den Formeln (13) und (14) nach) gilt:

(16) $$\begin{Vmatrix} (z_1^{(1)})_* & (z_2^{(1)})_* \\ -z_2^{(1)} & z_1^{(1)} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} (z_1^{(2)})_* & (z_2^{(2)})_* \\ -z_2^{(2)} & z_1^{(2)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (z_1^{(1)})_* + (z_1^{(2)})_* & (z_2^{(1)})_* + (z_2^{(2)})_* \\ -z_2^{(1)} - z_2^{(2)} & z_1^{(1)} + z_1^{(2)} \end{Vmatrix} = \\ = \begin{Vmatrix} (z_1^{(1)} + z_1^{(2)})_* & (z_2^{(1)} + z_2^{(2)})_* \\ -(z_2^{(1)} + z_2^{(2)}) & (z_1^{(1)} + z_1^{(2)}) \end{Vmatrix}$$

(17) $$\begin{Vmatrix} (z_1^{(1)})_* & (z_2^{(1)})_* \\ -z_2^{(1)} & z_1^{(1)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} (z_1^{(2)})_* & (z_2^{(2)})_* \\ -z_2^{(2)} & z_1^{(2)} \end{Vmatrix} = \\ = \begin{Vmatrix} (z_1^{(1)})_*(z_1^{(2)})_* - (z_2^{(1)})_* z_2^{(2)}, & (z_1^{(1)})_*(z_2^{(2)})_* + (z_2^{(1)})_* z_1^{(2)} \\ -z_2^{(1)}(z_1^{(2})_* - z_1^{(1)} z_2^{(2)}, & -z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_* + z_1^{(1)} z_1^{(2)} \end{Vmatrix} = \\ = \begin{Vmatrix} (z_1^{(1)} z_1^{(2)} - z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*)_*, & (z_1^{(1)} z_2^{(2)} + z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*)_* \\ -(z_1^{(1)} z_2^{(2)} + z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*), & (z_1^{(1)} z_1^{(2)} - z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*) \end{Vmatrix}.$$

Also

die Summe und der Produkt von zwei Matrizen (15) *ist wieder eine Matrix der Gestalt* (15), w. z. b. w.

6. Wir werden zeigen, dass es ein Isomorphismus unter den Clifford-Zahlen (9) und den Matrizen (15) stattfindet, indem die Matrizen

$$\begin{Vmatrix} (\mathbf{e}_\lambda)_* & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\lambda \end{Vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{Vmatrix} 0 & (\mathbf{e}_\mu)_* \\ -\mathbf{e}_\mu & 0 \end{Vmatrix} \qquad (0 < \lambda, \mu \leqslant 2^{n-1})$$

der Einheiten $\mathbf{e}_\lambda$ bzw. $\mathbf{e}_{2^{n-1}+\mu}$ isomorph entsprechen.

Zum Beweis benützen wir die Multiplikationstafel (8) und einige Formeln aus der Arithmetik der Clifford-Zahlen.

7. Das Element der Matrix $\mathfrak{E}$, welches auf der Kreuzung der i-Zeile und k-Kolonne steht, bezeichnen wir mit $\mathbf{e}_{i,k}$, das Element dagegen, welches auf derselben Stelle in der Matrix $\mathcal{E}$ [I], (30) steht, bezeichnen wir mit $e_{i,k}$.

Aus (11) haben wir

(18) $$e_{i,k} = \mathbf{e}_{k,i}.$$

Es gilt die

Formel Ia:

(19) $$\operatorname{sgn} \mathbf{e}_{1,2^{n-1}+i} = -\operatorname{sgn} \mathbf{e}_{1,i} \qquad (0 < i \leqq 2^{n-2}).$$

Diese Formel ist nach (18) der Gleichheit

(20) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+i,1} = -\operatorname{sgn} e_{i,1} \qquad (0 < i \leqq 2^{n-2})$$

äquivalent.

Wir kommen auf den Beweis der Formel (20):

$(\mathcal{E}^{(12)})'$ und $\mathcal{E}^{(11)}$ sind a-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{1,k} = \operatorname{sgn} e_{1,2^{n-2}+k} \qquad (0 < k \leqq 2^{n-2})$$

deshalb gilt die Gleichheit

(21) $$\operatorname{sgn} e_{i,1} = \operatorname{sgn} e_{1,2^{n-1}} \qquad (0 < i \leqq 2^{n-2}).$$

$\mathcal{E}^{(1)}$ und $(\mathcal{E}^{(2)})'$ sind a-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{1,l} = \operatorname{sgn} e_{1,2^{n-1}+l} \qquad (0 < l \leqq 2^{n-1}),$$

also

(22) $$\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}} = \operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0 < j \leqq 2^{n-1}).$$

Aus (22) und (21) folgt

(23) $$\operatorname{sgn} e_{i,1} = \operatorname{sgn} e_{i,2^{n-1}+1} \qquad (0 < i \leqq 2^{n-2}).$$

Aus $\mathcal{E}^{(3)} = -\mathcal{E}^{(2)}$ folgt

(24) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+j,1} = -\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0 < j \leqq 2^{n-1}).$$

Aus (23) und (24) folgt

(20) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+i,1} = -\operatorname{sgn} e_{i,1} \qquad (0 < i \leqq 2^{n-2}).$$

Aus (20) und (18) folgt die Formel Ia.

8. Es gilt die

Formel Ib:

(25) $$\operatorname{sgn} \theta_{1,2^{n-1}+2^{n-2}+i} = \operatorname{sgn} \theta_{1,2^{n-2}+i} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2}).$$

Nach (18) genügt es statt (25) die Formel

(26) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+2^{n-2}+i,1} = \operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2})$$

zu beweisen.

$(\mathcal{E}^{(13)})'$ und $\mathcal{E}^{(14)}$ sind a-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+1,k} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+1,2^{n-2}+k} \qquad (0<k\leqslant 2^{n-2})$$

deshalb haben wir die Gleichheit

(27) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,2^{n-1}} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2})$$

$\mathcal{E}^{(1)}$ und $(\mathcal{E}^{(2)})'$ sind a-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{1,l} = \operatorname{sgn} e_{1,2^{n-1}+l} \qquad (0<l\leqslant 2^{n-1})$$

also gilt

(28) $$\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}} = \operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0<j\leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (27) und (28) folgt (indem wir in (28) $j=2^{n-2}+i$ setzen):

(29) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,2^{n-1}+1}.$$

Aus $\mathcal{E}^{(3)} = -\mathcal{E}^{(2)}$ folgt

24) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+j,1} = -\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0<j\leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (24) und (29) (indem wir in (24) $j=2^{n-2}+1$ setzen) folgt:

(26) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} = \operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+2^{n-2}+i,1} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2}).$$

Aus (26) und (18) folgt (25).

9. Wir benützen die Formeln (19) und (25) und beweisen die

Formel II:

(30) $$z = z_1 + \theta_{2^{n-1}+1}(z_2)_*$$

wo z, z_1 und z_2 durch die Formeln (9), (9.a) und (9.b) erklärt sind.

Es genügt augenscheinlich die Gleichheit

(31) $$\theta_{2^{n-1}+l} = \theta_{2^{n-1}+1}(\theta_l)_* \qquad (0<l\leqslant 2^{n-1})$$

zu beweisen.

$\mathfrak{E}$ ist eine a-Matrix, deshalb gilt

$$\mathfrak{E}^{(3)} = -\mathfrak{E}^{(2)}.$$

Daraus folgt

(32) $$\mathrm{e}_{2^{n-1}+\lambda, \mu} = -\mathrm{e}_{\lambda, 2^{n-1}+\mu} \qquad (0 < \lambda, \mu \leqslant 2^{n-1}).$$

Setzen wir in (32) $\lambda = 1$, so haben wir

(33) $$\mathrm{e}_{2^{n-1}+1, \mu} = -\mathrm{e}_{1 . 2^{n-1}+\mu} \qquad (0 < \mu \leqslant 2^{n-1}).$$

Aus der Multiplikationstafel (8) folgt

(34) $$\mathrm{e}_{2^{n-1}+1, \mu} = \mathrm{e}_{2^{n-1}+1} (\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1 \mu}) \cdot \mathrm{e}_{\mu} = (\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, \mu})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathrm{e}_{\mu} \qquad (0 < \mu \leqslant 2^{n-1}),$$

(35) $$\mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+\mu} = \mathrm{e}_1 \cdot (\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+\mu}) \cdot \mathrm{e}_{2^{n-1}+\mu} = (\operatorname{sgn} e_{1, 2^{n-1}+\mu})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+\mu} \qquad (0 < \mu \leqslant 2^{n-1}).$$

Die Formeln (34) und (35) teilen wir jede in zwei Gleichheiten

$$\left.\begin{array}{ll}
(34.\mathrm{a}) & \mathrm{e}_{2^{n-1}+1, i} = (\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, i}) \cdot \mathrm{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathrm{e}_i \\
(34.\mathrm{b}) & \mathrm{e}_{2^{n-1}+1, 2^{n-2}+i} = (\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, 2^{n-2}+i}) \cdot \mathrm{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathrm{e}_{2^{n-2}+i} \\
(35.\mathrm{a}) & \mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+i} = (\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+i})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+i} \\
(35.\mathrm{b}) & \mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+2^{n-2}+i} = (\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+2^{n-2}+i})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+2^{n-2}+i}
\end{array}\right\} (0 < i \leqslant 2^{n-2})$$

Aus (33), (34.a) und (35.a) folgt

(36.a) $$(\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, i})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+1}\, \mathrm{e}_i = -(\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+i})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+i}.$$

Aus (33), (34.b) und (35.b) folgt

(36.b) $$(\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, 2^{n-2}+i})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+1}\, \mathrm{e}_{2^{n-2}+i} = \\ = -(\operatorname{sgn} \mathrm{e}_{1, 2^{n-1}+2^{n-2}+i})\, \mathrm{e}_{2^{n-1}+2^{n-2}+i}.$$

Aus (19) und (36.a) folgt

(37.a) $$\mathrm{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathrm{e}_i = \mathrm{e}_{2^{n-1}+i} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2}).$$

Aus (25) und (36.b) folgt

(37.b) $$\mathrm{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathrm{e}_{2^{n-2}+i} = -\mathrm{e}_{2^{n-1}+2^{n-2}+i} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2}).$$

Fassen wir (37.a) und (37.b) zusammen indem wir (12) in Acht nehmen, so erhalten wir (31). Daraus folgt die Formel II.

10. Es sei

(38) $$\zeta = \alpha_1 \mathfrak{e}_1 + \alpha_2 \mathfrak{e}_2 + \ldots + \alpha_{2^{n-1}} \mathfrak{e}_{2^{n-1}}.$$

Wir beweisen die

Formel III:

(39) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \zeta = \zeta_* \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}.$$

Augenscheinlich genügt es zu zeigen, dass

(40) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \mathfrak{e}_\lambda = (\mathfrak{e}_\lambda)_* \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \qquad (0 < \lambda \leqslant 2^{n-1})$$

(40) teilen wir in zwei Formeln

(40.a) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathfrak{e}_i = (\mathfrak{e}_i)_* \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2})$$

(40.b) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathfrak{e}_{2^{n-2}+i} = (\mathfrak{e}_{2^{n-2}+i})_* \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2})$$

und beweisen diese Gleichheiten:

Der Multiplikationstafel (8) nach (und nach der Bemerkung, dass $\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{\sigma,1} = 1$, $0 < \sigma \leqslant 2^n$) sind die Formeln (40.a) und (40.b) den Formeln

(41.a) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,i}) \cdot \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,i} = (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1}) \mathfrak{e}_{i,2^{n-1}+1}$$

(41.b) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2,2^{n-2}+i}) \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,2^{n-2}+i} = -(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1}) \mathfrak{e}_{2^{n-2}+i,2^{n-1}+1}$$

äquivalent.

$\mathfrak{E}$ ist eine α-Matrix, deshalb folgt nach [I], (9), dass (41.a) und (41.b) den Formeln

(42.a) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,i}) \cdot (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,i}) = (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1})(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{i,2^{n-1}+1}),$$

(42.b) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-2}+i})(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,2^{n-2}+i}) = \\ = -(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1})(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-2}+i,2^{n-1}+1})$$

äquivalent sind.

Aus $\mathfrak{E}^{(2)} = -\mathfrak{E}^{(3)}$ folgt

$$\mathfrak{e}_{i,2^{n-1}+k} = -\mathfrak{e}_{2^{n-1}+i,k}.$$

Setzen wir $i=1$, $k=1$, so haben wir

(43) $$\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1} = -\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,1}.$$

Aus

$$\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,1} = 1$$

und (43) folgt

(44) $$\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1} = -1.$$

Setzen wir (44) in (42.a) und (42.b), so erhalten wir

(45.a) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,\,l})(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,\,l}) = -\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{l,\,2^{n-1}+1},$$

(45.b) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-2}+l})(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,2^{n-2}+l}) = \operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-2}+l,\,2^{n-1}+1}.$$

Statt der Formeln (45.a), (45 b) genügt es nach (11) die Formeln

(46.a) $$(\operatorname{sgn} e_{l1})(\operatorname{sgn} e_{l,\,2^{n-1}+1}) = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+1,\,l},$$

(46.b) $$(\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+l,\,1})(\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+l,\,2^{n-1}+1}) = \operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+1.\,2^{n-2}+l}$$

zu beweisen.

In $\mathcal{E}$ gilt

$$\operatorname{sgn} e_{1,\sigma} = 1 \qquad (0 < \sigma \leqslant 2^n),$$

deshalb folgt aus $\mathcal{E}^{(3)} = -\mathcal{E}^{(2)}$

(47) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+\lambda} = -1 \qquad (0 < \lambda \leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (47) folgt, dass die Formeln (46.a) bzw. (46.b) den Gleichheiten

(48.a) $$\operatorname{sgn} e_{l,\,1} = \operatorname{sgn} e_{l,\,2^{n-1}+1}$$

bzw. $$(0 < i \leqslant 2^{n-1})$$

(48.b) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+l,\,1} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+l,\,2^{n-1}+1}$$

äquivalent sind.

Die Formel (48.a) haben wir schon als Formel (23) bewiesen, die Formel (48 b) dagegen haben wir als (27) bewiesen.

Damit ist (39) bewiesen.

11. Wir kommen zum Beweis des Hauptsatzes:

Sind den Clifford-Zahlen $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$ nach (15) Matrizen $\mathfrak{Z}^{(1)}$ und $\mathfrak{Z}^{(2)}$ zugeordnet, so folgt aus (16) dass der Clifford-Zahl

$$z^{(3)} = z^{(1)} + z^{(2)}$$

die Matrix

$$\mathfrak{Z}^{(3)} = \mathfrak{Z}^{(1)} + \mathfrak{Z}^{(2)}$$

zugeordnet ist.

Wir beweisen noch, dass der Zahl

(49) $$z^{(4)} = z^{(1)} \cdot z^{(2)}$$

die Matrix

$$\mathfrak{Z}^{(4)}=\mathfrak{Z}^{(1)}\cdot\mathfrak{Z}^{(2)} \tag{50}$$

zugeordnet ist. Wir berechnen die Zahl (49):

Aus (30) folgt

$$\begin{aligned} z^{(4)}&=(z_1^{(1)}+\theta_{2^{n-1}+1}\cdot(z_2^{(1)})_*)\cdot(z_1^{(2)}+\theta_{2^{n-1}+1}(z_2^{(2)})_*)=\\ &=z_1^{(1)}\cdot z_1^{(2)}+z_1^{(1)}\cdot\theta_{2^{n-1}+1}\cdot(z_2^{(2)})_*+\theta_{2^{n-1}+1}(z_2^{(1)})_* z_1^{(2)}+\\ &\quad+\theta_{2^{n-1}+1}(z_2^{(1)})_*\theta_{2^{n-1}+1}(z_2^{(2)})_*. \end{aligned} \tag{51}$$

Aus (39) und (51) folgt

$$\begin{aligned} z^{(4)}&=z_1^{(1)}\cdot z_1^{(2)}+(\theta_{2^{n-1}+1})^2((z_2^{(1)})_*)_*(z_2^{(2)})_*+\theta_{2^{n-1}+1}(z_1^{(1)})_*(z_2^{(2)})_*+\\ &\quad+\theta_{2^{n-1}+1}(z_2^{(1)})_* z_1^{(2)}. \end{aligned} \tag{52}$$

Aus

$$(\theta_{2^{n-1}+1})^2=-\theta_1 \tag{53}$$

und

$$(z_*)_*=z \tag{54}$$

für eine beliebige Clifford-Zahl z ((54) folgt unmittelbar aus der Definition der zu z adjungierten Zahl (12)) und (52) folgt

$$z^{(4)}=z_1^{(1)}z_1^{(2)}-z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*+\theta_{2^{n-1}+1}(z_1^{(1)}z_2^{(2)}+z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*)_*. \tag{55}$$

Aus (55), (30) und (15) folgt, dass der Zahl $z^{(4)}$ die Matrix

$$\begin{Vmatrix} (z_1^{(1)}z_1^{(2)}-z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*)_*, & (z_1^{(1)}z_2^{(2)}+z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*)_* \\ -(z_1^{(1)}z_2^{(2)}+z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*), & (z_1^{(1)}z_1^{(2)}-z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*) \end{Vmatrix}$$

zugeordnet ist. Das ist aber nach (17) und (50) die Matrix $\mathfrak{Z}^{(4)}$. Damit ist der Beweis des Hauptsatzes zu Ende.

SUR LES FORMES QUE DOIT AVOIR UN VASE QUI, PLONGÉ DANS L'EAU, LA PARTIE IMMERGÉE SOIT UNE FONCTION DONNÉE $x_1(x)$ DE LA HAUTEUR TOTALE x DU VASE

Par C. POPOVICI, Bucarest

Ce mémoire est consacré au sujet que j'ai eu l'honneur de traiter devant la Société Polonaise de Mathématique, à l'Université Jagellonnienne de Cracovie, dans une de mes conférences que j'ai faites, sur l'invitation de l'illustre et vénéré maître M. Stanislas Zaremba au mois de Mai 1938.

Le but suivi dans ce mémoire est celui de montrer, par un exemple intuitif, intéressant en lui même, qu'il existe des problèmes de physique mathématique qui nous fassent voir que l'équation

$$\int_c^x Z(x,y)S(y)\,dy=Q(x) \tag{1}$$

ainsi que l'équation

$$S(x)+\int_c^x Z(x,y)S(y)\,dy=Q(x) \tag{2}$$

où le noyau $Z(x,y)$ peut être, si l'on veut, continu et ayant des dérivées de tout ordre voulu, peuvent admettre, dans des cas assez généraux pour Z, une infinité de solutions pour la fonction inconnue S.

Cela arrive lorsque le noyau $Z(x,y)$ n'est pas doté, dans l'intervalle d'intégration, par une même expression analytique d'un côté et de l'autre d'un cylindre $y=x_1(x)+x$.

Dans ces cas nous dirons que $Z(x,y)$ est un noyau *raccomodé*.

Nous verrons d'abord, par des simples considérations intuitives, sans faire aucun calcul, la nature et la puissance de l'ensemble des solutions; ensuite nous emploierons des methodes analytiques et surtout graphiques pour construire les solutions et voir dans quelles conditions il existe une solution unique.

Nous verrons que l'explication du fait qu'il existent une infinité de solutions et cela même si nous ne considérons pas comme distinctes deux solutions S et s telles que

$$\int_c^x [S(y)-s(y)]\,dy = 0$$

réside dans ce fait, que les équations (1) et (2), tout en gardant l'apparence d'être des équations ordinaires de M. Volterra, elles déguisent, si le noyau est raccomodé, des équations que nous avons appelé „intégro-fonctionnelles" et dont nous avons démontré qu'elles admettent une infinité de solutions. Dans l'admirable et récent traité „Théorie Générale des Fonctionnelles" de M. M. Volterra et Pérès [1]) ces célèbres auteurs ont introduit un chapitre spécial à ce sujet dans lequel se trouve une partie de nos résultats [1]).

Démonstration intuitive

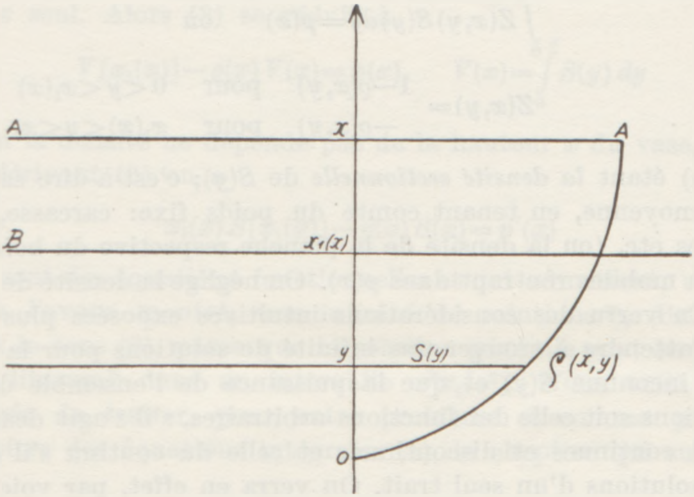
Supposons que l'on a trouvé une solution particulière.

Supposons pour fixer les idées que la forme du vase, ou d'une figure en planches de bois, nous voulons qu'elle soit une surface de révolution, et soit la courbe ci tracée AO une courbe méridienne qui nous fournit une solution, alors, on se rend compte, surtout si l'on considère la densité ϱ constante pour toute planche $S(y)dy$, dont $S(y)$ est la surface d'une section à la hauteur y du fond du vase, que notre problème est un problème de similitude et que, si par exemple $x_1(x) = \frac{2}{3}x$, alors en coupant la figure par un plan horizontal, la nouvelle surface flottante, devra, par l'énoncé du problème, rester plongée aussi deux tiers de sa hauteur dans l'eau.

---

[1]) Editions Gauthier Villars 1936. Voir notamment pp. 209, 210, 212, 214, 219, 346.

On se rend aussi compte, par un bon sens de la nature des choses que, à toute courbe méridienne AO à tangente monotone, correspond une infinité de courbes méridiennes *ondoyantes* ABO qui doivent satisfaire à notre problème. Au point de vue pratique on n'aura peut-être jamais besoin de construire de tels vases, au point de vue esthétique, si l'on veut. En tout cas un grand constructeur s'est amusé à construire



de pareils jouets; c'est le plus immortel des géomètres, le bon Dieu lorsqu'il a construit la coquille de l'escargot. Ces coquilles sont des surfaces helicoïdales qui répondent à certaines données de notre problème. On voit ainsi que ce travail est un hommage rendu au plus illustre des géomètres.

L'ensemble de ces courbes méridiennes ondoyantes aura la puissance C du continu et cela pour chaque rapport donné entre la largeur et la hauteur donnée x du vase.

Mais l'ensemble total des solutions, pour chaque hauteur et largeur données du vase, a la puissance plus grande. Elle peut être représentée par un nombre transfini $F=C^C$ qui représente la puissance de l'ensemble des fonctions arbitraires continues et discontinues. En effet rien ne nous empêche de considérer une figure constituée par des planches constituées par des innombrables cercles concentriques, dont le diamètre varie d'une manière discontinue. Par exemple les planches paires diffèrent comme diamètre des planches impaires d'une fonction donnée $\varphi(y)$ qui tend vers zéro en O et en A.

Étude analytique du problème

1. Désignons, comme plus haut par $S(y)$ la surface d'une section horizontale à la hauteur y du fond du vase. En appliquant le principe d'Archimède, on voit que la fonction $S(y)$ doit satisfaire à une équation intégrale de la forme

$$(1) \qquad \int_0^x Z(x,y)S(y)\,dy = p(x) \qquad \text{où}$$

$$(1') \qquad Z(x,y) = \begin{matrix} 1-\varrho(x,y) & \text{pour} & 0<y<x_1(x) \\ -\varrho(x,y) & \text{pour} & x_1(x)<y<x, \end{matrix}$$

$\varrho(x,y)$ étant *la densité sectionnelle* de $S(y)$; c'est-à-dire sa dénsité moyenne, en tenant comte du poids fixe: carcasse, machines etc. (ou la densité de la planche respective du bois), les poids mobiles rentrant dans $p(x)$. On néglige la densité de l'air.

En vertu des considérations intuitives exposées plus haut on s'attendra à trouver une infinité de solutions pour la fonction inconnue $S(y)$ et que la puissance de l'ensemble de ces solutions soit celle des fonctions arbitraires, s'il s'agit des solutions continues et discontinues et celle du continu s'il s'agit des solutions d'un seul trait. On verra en effet, par voie analytique et par voie graphique, en construisant ces solutions, que cela est vrai. De cette manière notre exemple sera une vérification de plus de la feconde vérité, dont M. Zaremba, avec sa haute autorité scientifique, attire l'attention que: l'intuition physique jette souvant des lumières sur des problème les plus délicates de l'analyse mathématique.

2. Nous allons voir que l'équation intégrale (1) admet une infinité de solutions et cela indépendamment du fait que le noyau Z soit continu [1]) ou discontinu. L'infinité des solutions est précisée dans ce sens que nous ne considérons pas comme distinctes deux solutions S et s telles que:

$$(2) \qquad \int_0^x [S(y)-s(y)]\,dy = 0.$$

---

[1]) Nous verrons plus loin que le noyau Z peut être continu sur la ligne de flottaison, le problème d'hydrostatique tout en gardant un sens physique.

En effet l'équation intégrale (1) peut s'écrire sous la forme

$$(3)\qquad \int_0^{x_1(x)} S(y)\,dy - \int_0^x \varrho(x,y)\,S(y)\,dy = p(x)$$

qui est une équation du genre que nous avons appelé intégro-fonctionnelles. Elles admettent une infinité de solutions, comme on peut le voir par exemple en prenant la densité fonction de x seul. Alors (3) se réduit à

$$(3')\qquad V[x_1(x)] - \varrho(x)\,V(x) = p(x), \qquad V(x) = \int_0^x S(y)\,dy$$

ou si la densité ne dépende pas de la hauteur x du vase, alors en dérivant (3) on a

$$(3'')\qquad x_1'(x)\,S[x_1(x)] - \varrho(x)\,S(x) = p'(x)$$

qui sont des équations fonctionnelles et qui admettent, comme nous l'avons montré, une infinité de solutions [1]), distinctes dans le sens (2), parce que la solution générale peut être prise „ad libitum" dans un intervalle $x^0 x_1(x^0)$. Nous voilà donc obligés de traiter, pour notre problème et comme premier chapitre des équations intégrales (1), le chapitre qui suit.

Équations fonctionnelles

3. Les équations (3′) et (3″) ont la même forme. Commençons par le cas le plus simple $x_1(x) = \lambda x$, $\varrho = \lambda$, $p'(x) = 0$. Nous devons résoudre l'équation fonctionnelle:

$$(4)\qquad S(\lambda x) = S(x).$$

Supposons que le vase doit être une surface de révolution. Soit $z = z(y)$ la courbe méridienne, donc $S(x) = \pi z^2(x)$. On a les solutions

$$(5)\qquad \begin{gathered} z^2(x) = Cx^r + k \qquad \text{où} \qquad rL\lambda = 2ni\pi, \\ \text{donc} \qquad z^2 = k + C \sum A_n \cos 2n\pi \frac{Lx}{L\lambda} + B_n \sin 2n\pi \frac{Lx}{L\lambda}\,; \end{gathered}$$

on obtient un cylindre pour $C = 0$ et si $C \neq 0$ une sorte de cylindroïdes à plis qui se serrent vers le fond du vase.

---

[1]) Voir: *Théorie générale des fonctionnelles*, de M. M. Volterra et Pérès, p. 210 et 346.

Pour $x=0$ (en espèce $x=0$ au fond du vase) z est indéterminé, mais nous pouvons trouver des solutions de (4) en dehors de $S=k$ et qui prennent une valeur assignée k pour $x=0$ et qui de plus soient uniformes et ayant des valeurs réelles même pour $x<0$. Ainsi par exemple

$$S(x)=k+C\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^n x}{1+c^2\lambda^{2n}x^2} \tag{6}$$

ou

$$S(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^{n\alpha}P(\lambda^n x)x^\alpha}{1+Q^2(\lambda^n x)}+k, \tag{6'}$$

P et Q des polynômes arbitraires de dégrés p et q, $p<2q-\alpha$ et $P(0)=1$.

4. Lorsque $\lambda/\varrho=a\neq 1$ alors notre équation fonctionnelle

$$aS[x_1(x)]=S(x) \tag{3''}$$

admet des solutions de la forme

$$S=x^{-\frac{La}{L\lambda}}\left[C+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos 2k\pi\frac{Lx}{L\lambda}+B_k\sin 2k\pi\frac{Lx}{L\lambda}\right] \tag{7}$$

(C, A_k, B_k, arbitraires), parabolique pour $A_k=B_k=0$.

Pour $x=0$ on a $S=0$ si $-La/L\lambda>0$ donc $\varrho<\lambda$ et $S=\infty$ si $-La/L\lambda<0$ donc $\varrho>\lambda$ (hyperbolique).

Pourtant même dans ce dernier cas on peut avoir $S=0$ dans $x=0$, pour une infinité de solutions qu'on peut prendre de la forme

$$S=c\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{ns}\frac{\lambda^{n\alpha}P(\lambda^n x)x^\alpha}{1+Q^2(\lambda^n x)} \tag{8}$$

$$\lambda^{2q-p}<a^s\lambda^\alpha<1 \quad \text{et} \quad \alpha>-La/L\lambda,$$

p et q les dégrés des polynômes P et Q, $P(0)=1$.

Une autre solution sera

$$S=cx^{-\frac{La}{L\lambda}}\sigma(P,Q) \tag{8'}$$

où σ est l'expression (6') où l'on prendra $k=0$ si l'on veut $S(0)=0$ et

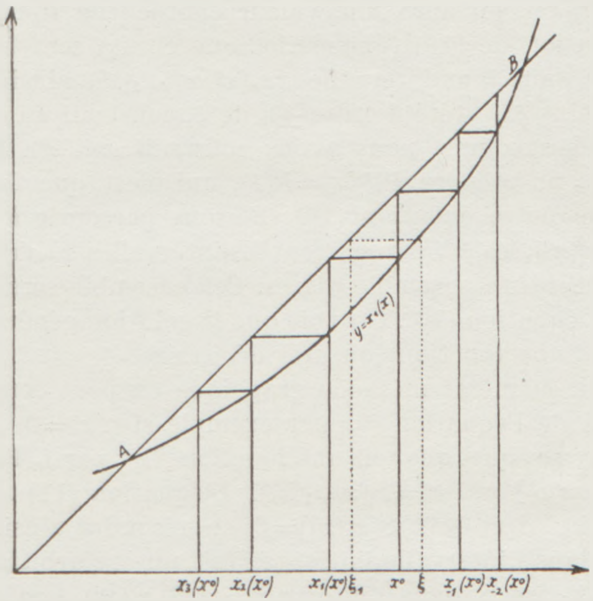
$$\alpha>-La/L\lambda.$$

Prolongement fonctionnel

5. Outre les solutions (5), (6) etc. qui dépendent d'une infinité de constantes arbitraires, nous verrons qu'il existe une infinite d'autres solutions dont la plupart ne peuvent pas être dotées d'éxpressions analytiques. Ainsi notre équation (3') ou (3'') peut se mettre sous la forme

$$(9)\qquad S(x)-a(x)S[x_1(x)]=q(x) \quad \text{où} \quad a(x)=\frac{x_1'(x)}{\varrho(x)},\quad q(x)=\frac{-p'(x)}{\varrho(x)}.$$

Les expressions analytiques des fonctions données $a(x)$, $x_1(x)$ et $q(x)$ ne nous intéressent pas; ces expressions analy-



tiques peuvent exister, ou *n'existent même* peut être pas; elles peuvent être données par des graphiques. Il est évident que *le problème a un sens et sa solution demande une réponse.*

Nous pouvons *construire* les solutions de l'équation (9) ainsi: Traçons dans un plan la bissectrice $y=x$ et la courbe $y=x_1(x)$.

Construisons à partir d'une abscisse arbitraire x^0, par des parallèles aux axes, des marches dont les sommets s'appuient sur la bissectrice et la courbe tracée.

Les largeurs de ces marches seront: l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$ et d'un côté ses itérés $x_1(x^0) x_2(x^0) \dots x_n(x^0) x_{n+1}(x^0)$ de l'autre côté $x^0 x_{-1}(x^0) \dots x_{-n}(x^0) x_{-n-1}(x^0)$ où $x_{\pm n+1}(x^0) = x_{\pm n}[x_1(x^0)]$.

A chaque point ξ de l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$ corespond un point $\xi_1 = x_1(\xi)$ dans l'intervalle $x_1(x^0) x_2(x^0)$.

Allons d'abord construire les solutions de l'équation (9) où l'on suppose $a=1$, $q=0$; c'est-à-dire *les fonctions périodiques en* $x_1(x)$:

$$(10) \qquad P(x) = P[x_1(x)].$$

Pour cela nous prendrons pour P une fonction (ou arc) arbitraire, dans l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$. Pour tout point ξ compris dans $x^0 x_1(x^0)$, on aura une valeur choisie „ad libitum" $P(\xi)$. Une solution de (10) (une périodique en x_1) sera ensuite déterminée dans tout intervalle $x_{\pm n}(x^0) x_{\pm n+1}(x^0)$ ainsi: On prendra le point $\xi_{\pm n}$ itéré d'ordre $\pm n$ de ξ, construit en employant les marches comme nous avons construit $x_{\pm n}(x^0)$. Pour tout point $\xi_{\pm n}$ on prendra $P(\xi_{\pm n}) = P(\xi)$, qui n'est que l'expression même de notre équation (10). Faisons parcourir à ξ l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$, les $\xi_{\pm n}$ parcourront les intervalles $x_{\pm n}(x^0) x_{\pm n+1}(x^0)$ et P tracera un ensemble d'arcs. Cet ensemble sera une solution de l'équation (10). On voit que la solution générale de (10) dépend d'une fonction (ou arc) arbitraire.

6. Par la même méthode graphique on peut construire les solutions de l'équation (9) par exemple si $q(x) = 0$. Désignons pour abréger, quel que soit une fonction $f(x)$, par f_n l'expression $f_n(x) = f[x_n(x)]$ où $x_n = x_1[x_{n-1}(x)]$. L'équation (11) $S - aS_1 = 0$ c'est-à-dire $S(x) - a(x) S[x_1(x)] = 0$ se résoudra ainsi: Traçons pour S dans l'intervalle initial $x^0 x_1(x^0)$ un arc arbitraire. Alors S_1 c'est-à-dire S dans l'intervalle $x_1(x^0)\, x_2(x^0)$ sera déterminé et connu, on tracera dans cet intervalle et dans les suivants

$$(11) \qquad S_1 = S/a, \;\; S_2 = S_1/a_1 = S/aa_1, \dots, S_n = S/a\,a_1 \dots a_n$$

et dans les intervalles itérés négatifs $x^0 x_{-1}(x^0) \dots x_{-n-1}(x^0) x_{-n}(x^0)$ on aura

$$(11') \quad S_{-1} = a_{-1} S, \;\; S_{-2} = a_{-1} a_{-2} S, \dots, S_{-n} = a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} S.$$

Si l'on veut tracer ces S dans le graphique, il faut convenir que l'on ait choisi une unité de mesure, parce que nous avons des multiplications et des divisions à faire.

a étant par hypothèse connu partout, $a_{\pm n}$ sera la portion de la courbe qui représente a dans l'intervalle

$$x_{\pm n}(x^0)\, x_{\pm n+1}(x^0).$$

7. Pareillement si $q \neq 0$, on aura

$$S_1 = \frac{S-q}{a},$$

(12)

$$S_2 = \frac{S_1 - q_1}{a_1} = \frac{S}{aa_1} - \left(\frac{q}{aa_1} + \frac{q_1}{a_1}\right), \ldots, S_n = \frac{S}{\pi^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q_k}{\pi_r^{n-r}},$$

$$S_{-1} = Sa_{-1} + q_{-1},$$

(12′)

$$S_{-2} = Sa_{-1}a_{-2} + q_1 a_{-2} + q_{-2}, \ldots, S_{-n} = \frac{S}{\pi^{-n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q_{-n+k}}{\pi_{-n+k}^{-k}},$$

(13) $$\pi^n = aa_1 \ldots a_{n-1}, \qquad \pi^{-n} = 1 : a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n}.$$

On voit que la courbe $y = a(x)$ étant tracée sur la figure, S sera connu et construit successivement dans tous les intervalles si S est tracé „ad libitum" dans un intervalle initial $x^0 x_1(x^0)$.

Remarquons, que l'équation (3′) n'exige pas $p(0) = 0$, quoique (3′) est déduite de (1).

Équations fonctionnelles d'ordre supérieur

8. Soit l'équation

(14) $$S_n + a^1 S_{n-1} + \ldots + a^{n-1} S_1 + a^n S = 0, \quad S_k = S[x_k(x)]$$

les $a^k(x)$ donnés.

On peut construire les solutions en employant le même graphique. On voit que si, à partir d'un point arbitraire x^0, on se donne „ad libitum" $S, S_1, \ldots, S_{n-1}$ c'est-à-dire S depuis x^0 jusqu'à $x_{n-1}(x^0)$, alors S_n est déterminé par

(14′) $$S_n = -\sum a^{n-k} S_k$$

car le second membre étant connu, on connaitra S_n c'est-à-dire S dans l'intervalle $x_n(x^0)\, x_{n+1}(x^0)$. On le connaitra ensuite dans $x_{n+1}(x^0)\, x_{n+2}(x^0)$ etc., et par le même procédé dans les intervalles négatifs.

Équations de dégré supérieur

9. Soit à intégrer l'équation

(15) $$\varphi[x_1(x)]=R[x,\varphi(x)],$$

R étant un polynôme de dégré r en φ. On peut employer le même procédé graphique. On prendra pour φ une fonction (ou arc) arbitraire dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$ avec x^0 arbitraire. Alors $\varphi_1(x)=\varphi[x_1(x)]$ c'est-à-dire φ dans l'intervalle $x_1(x^0)x_2(x^0)$ sera connu par l'expression même de notre équation fonctionnelle:

(15) $$\varphi_1=R(x,\varphi),\quad \text{et ensuite}$$
$$\varphi_2=R(x_1,\varphi_1),\ldots,\varphi_n=R[x_{n-1},\varphi_{n-1}].$$

Pour faire le prolongement fonctionnel vers les itérés négatifs nous écrivons (15) sous la forme

(15′) $$\varphi(x)=R[x_{-1},\varphi_{-1}]$$

et remarquons que, $\varphi(x)$ étant donné dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$, l'équation (15′) nous donne r racines de φ_{-1} c'est-à-dire r branches, en d'autres termes r solutions de φ dans l'intervalle $x^0x_{-1}(x^0)$. À chacune de ces solutions correspondront aussi r branches réelles ou imaginaires φ_{-2} donc en total r^2 déterminations de φ dans $x_{-1}(x^0)\,x_{-2}(x^0)$.

En résumé, la solution de l'équation (15), après avoir été choisie „ad libitum“ dans $x^0x_1(x^0)$, se présentera comme un arbre, dont le tronc (vers les itérés positifs) sera déterminé et unique, tandis que vers les itérés négatifs les branches se ramifieront de sorte que, au niveau $x_{-n}(x^0)$, on aura r^{n+1} branches. Si le premier membre de (15) était du dégré s en φ, le tronc se ramifiera vers le bas, de sorte qu'on aura s^n branches au niveau $x_n(x^0)$. Quelques-unes de ces ramifications peuvent devenir imaginaires, puis réaparaître comme certains fleuves qui se cachent sous le sable. Exemple:

$$\varphi_1=i/\varphi,\ i=\sqrt{-1},\ \text{donne}\ \varphi_{2n}=\pm\varphi,\ \varphi_{2n+1}=\pm i:\varphi.$$

Équations intégrales et intégro-fonctionnelles

10. Le problème de déterminer la forme d'un vase flottant dont la partie immergée dans l'eau soit une fonction $x_1(x)$ de la hauteur x du vase nous a ammené à l'équation intégrale

$$(1) \qquad \int_0^x Z(x,y)\,S(y)\,dy = p(x)$$

où

$$(1') \qquad \begin{aligned} Z(x,y) &= 1-\varrho(x,y) \quad &\text{pour} \quad y < x_1(x) \\ Z(x,y) &= -\varrho(x,y) \quad &\text{pour} \quad y > x_1(x), \end{aligned}$$

$\varrho(x,y)$ étant la densité d'une section $S(y)$ à la hauteur y du fond du vase, $p(x)$ la cargaison.

Nous avons vu que cette équation admet une infinité de solutions, l'inconnue $S(y)$ pouvant être prise arbitraire dans un intervalle $x^0 x_1(x^0)$, avec x^0 arbitraire. Nous avons vérifié ça sur les cas particuliers où ϱ dépend soit de x, soit de y seulement.

Dans ces cas l'équation intégrale se reduisait à une équation fonctionnelle, dont nous avons montré qu'elle admet une infinité de telles solutions. Lorsque ϱ est une fonction en même temps de x et de y, comme il est naturel, il va de soi que „a fortiori" l'équation (1) admettra une infinité de solutions. Ainsi par ex. si $\varrho = \sum_1^n a^k(x)\,y^k$ on arrivera soit en différentiant, soit en intégrant par parties, à une équation différentiello-fonctionnelle d'ordre $n+1$, équation qui, nous le verrons, admet aussi une infinité de solutions.

11. *Objections sur la continuité du noyau.* On pourrait nous objecter: Oui, vous avez une infinité de solutions et, plus encore, dépendant d'une fonction arbitraire; mais cela est dû au fait que l'équation (1) n'a pas de noyau continu [1]). Nous allons montrer: 1° que même si le noyau est continu, ça n'empêche pas que l'équation (1) admette, en général, une infinité de solutions, 2° que l'on peut rendre le noyau continu, tout en gardant un sens physique à l'équation (1). Ça

[1]) Dans certains traités on n'exige pas même la continuité du noyau, mais seulement qu'il soit intégrable, pour que la solution soit unique. Or notre noyau est intégrable et pourtant il y a une infinité de solutions.

d'abord: Les relations (1′) nous montrent que le noyau Z ne peut pas être continu en traversant la ligne de flottaison $y=x_1(x)$. Mais cela est vrai seulement si ϱ est continu — en traversant cette ligne. Or, en général ϱ n'est pas continu. Quand on construit un vase, les différents étages varient brusquement de densité, à certains niveaux la densité peut même dépasser celle de l'eau. Pour rendre le noyau de (1) continu, il nous suffit d'une seule discontinuité de ϱ, le long de la ligne de flottaison. Ainsi supposons nous deux fonctions continues ϱ_1, et ϱ_2 et notons

$$(1'') \quad 1-\varrho_1(x,y)=f(x,y), \qquad -\varrho_2(x,y)=f(x,y)+[y-x_1(x)]^k\psi(x,y).$$

Pour garder un sens physique, il faut supposer $f(x,y)<0$ au voisinage de $y=x_1(x)$.

Notre équation (1) s'écrira

$$(16) \quad \int_0^x f(x,y)\,S(y)\,dy+\int_{x_1(x)}^x [y-x_1(x)]^k\psi(x,y)\,S(y)\,dy=p(x).$$

Cette équation contient comme componente une intégrale avec les *deux* limites variables et nous avons démontré dans différents travaux, depuis 1914, qu'une telle équation intégrale admet une infinité de solutions [1]). Dans ce travail nous allons voir ça directement. Pour nous en rendre compte, il suffit de le vérifier sur un cas simple. Soit $\psi(x,y)=c$, $k=1$. Prenons comme fonction inconnue auxiliaire $t(y)$ telle que sa derivée seconde $t''(y)=S(y)$ alors (16) s'écrira

$$(17) \quad \int_0^x f(x,y)\,t''(y)\,dy+c[x-x_1(x)]\,t'(x)-c[t(x)-t[x_1(x)]]=p(x)$$

qui est une équation intégro-différentiello-fonctionnelle. Si f ne dépend pas de y on obtient une équation différentiello-fonctionnelle

$$(18) \quad [f(x)+c[x-x_1(x)]]t'(x)-ct(x)-f(x)t'(0)-p(x)=-ct[x_1(x)].$$

Nous voila donc conduits à étudier les:

---

[1]) C. Popovici: *Nouvelles solutions de l'équation de Volterra*, Circolo Math. Palermo t. 39 (1915), p. 314—344; *Sur une équation fonctionnelle*, C. R. Ac. Paris, t. 158 (1914), p. 1866 etc. Pour le cas de deux variables voir deux notes: Rend. Ac. Lincei, t. 2 (1930), 6 série, et Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, t. XXIV, pp. 18—56.

Équations différentiello-fonctionnelles

12. Ces équations peuvent aussi s'intégrer intuitivement par la *méthode du prolongement fonctionnel.*

Prenons d'abord l'équation:

$$(19) \qquad y^k(x) = a(x)\, y[x_1(x)], \qquad y^k(x) = \frac{d^k y(x)}{dx^k}.$$

Nous allons voir ce fait, extrêmement curieux: lorsque $x_1(x) = x$ l'équation *ne peut pas s'intégrer*, en général, si $k \geqslant 2$; tandis que si $x_1(x) \neq x$ l'équation, *quoique plus compliquée, peut toujours s'intégrer. Elle le peut même si $a(x)$ et $x_1(x)$ ne sont pas dotés d'expressions analytiques.*

Prolongement fonctionnel

13. Nous allons nous servir de même graphique que au § 5.

Prenons pour $y(x)$ une fonction (ou arc) arbitrairement choisi dans un intervalle $x^0 x_1(x^0)$ avec x^0 aussi arbitrairement choisi, alors $y[x_1(x)]$, en d'autres termes y_1 dans l'intervalle $x_1(x^0)\ x_2(x^0)$ sera donné par

$$(19) \qquad y[x_1(x)] = \frac{y^k(x)}{a(x)}$$

où le second membre est connu car, y étant donné dans l'intervalle initial, toutes ses dérivées y sont implicitement données, ensuite $a(x)$ est donné par hypothèse (tracé) pour toute valeur de x. Maintenant y_1 étant connu, on aura successivement $y_2 \dots y_n$ par

$$(19') \qquad y_n = \frac{y^k_{n-1}}{a} = \frac{y^k(x)}{a a_1 \dots a_{n-1}}.$$

Ainsi l'intégrale y de (19) étant choisie „ad libitum“ dans $x^0 x_1(x^0)$, elle sera connue, et aura une seule valeur, pour tout point contenu dans un intervalle $x^0 a$ contenu dans $x^0 A$, $A = \lim x_n$.

14. Nous allons faire maintenant le prolongement fonctionnel vers les itérés négatifs. De ce côté, il arrive un phénomène analogue à celui que nous avons rencontré en résolvant les équations fonctionnelles de dégrés supérieurs, la solution ne

sera plus unique. En effet, changeons dans (19) x en $x_{-1}(x)$, on aura

$$\frac{d^k y[x_{-1}(x)]}{dx_{-1}(x)^k} = a[x_{-1}(x)]\, y(x). \tag{19''}$$

Le second membre est connu, car y est tracé dans l'intervalle initial $x^0 x_1(x^0)$ et a est tracé partout. On connaitra donc, non y, mais sa derivée d'ordre k dans $x_{-1}(x^0)\, x_{-2}(x^0)$.

La fonction (ou courbe) y sera donc connue à un polynome (parabole) arbitraire d'ordre k près, donc avec k constantes arbitraires.

Dans le second itéré négatif de l'intervalle initial s'introduiront encore k constantes arbitraires, on aura donc dans $y_{-n}(x^0)\, y_{-n-1}(x^0)$, nk constantes arbitraires, après avoir choisi y „ad libitum“ dans $x^0 x_1(x^0)$.

15. Supposons maintenant que l'équation (5) serait non linéaire, par exemple son premier membre serait de dégré r en $d^k y(x)/dx^k$, alors on aura une et une seule solution vers les itérés positifs, après avoir assigné à y une fonction donnée dans $x^0 x_1(x^0)$; mais vers les itérés négatifs la solution ne sera pas unique, elle aura dans l'intervalle $x_{-n+1}(x^0)\, x_{-n}(x^0)$, *$n^r$ branches et chaque* branche dépendra de *nk constantes arbitraires.*

Si, en plus, le second membre de (5) était de l'ordre q en $x_1(x)$ c'est-à-dire contiendrait $y_1, y_2, \ldots, y_q$, alors nous étions libres de choisir y „ad libitum“ dans un intervalle $x_0 x_q(x^0)$, ou dans q intervalles $x^p x_1(x^p)$ avec les x^p arbitraires, mais choisis tels que ces intervalles ne s'enchevêtrent pas.

Puissance de l'ensemble de solutions

16. *La puissance de l'ensemble de solutions d'une équation différentiello-fonctionnelle, d'ordre q et de dégré r est la même que la puissance de l'ensemble de solutions d'une équation fonctionnelle d'ordre q.*

Cette puissance est celle de l'ensemble de fonctions arbitraires s'il s'agit des solutions continues et discontinues (c'est le nombre transfini $F = C^C$) et celle du continu C s'il s'agit des solutions continues dans tout intervalle qui ne contient pas un point limite $x_{\pm n}$, mais pouvant être discontinues dans les points limites.

L'ensemble de solutions d'une équation fonctionnelle est évidement de puissance F, parce que la solution générale n'est qu'une transformation *ponctuelle* d'une fonction arbitraire, *continue* ou *discontinue*, dans l'intervalle initial, comme les images dans une série de miroires gauches de cette fonction. Il n'est pas question absolue de l'existence des dérivées etc.

Lorsqu'il s'agit des équations différentiello-fonctionnelles on est obligé de penser à l'existence des dérivées, mais il n'est pas moins vrai que la solution générale dépend d'une fonction arbitraire initiale, continue ou discontinue. Il faudra alors élargir le cadre de la notion de dérivée; d'ailleurs il y a des fonctions continues et qui n'ont pas de dérivées et des fonctions discontinues dont l'aire est la même que celle d'une fonction continue dans tout intervalle. Gardons la vieille conception de la derivée et supposons que nous ayons choisi dans l'intervalle initial pour la solution un arc d'un seul trait et continu. Il y aura des discontinuités au points de jointure $x_{\pm n}(x^0)$ et aux points limites de ceux-ci, autant pour les équations fonctionnelles que pour les équations différentielle-fonctionnelles; mais à cet arc correspond une seule solution pour les équations fonctionnelles et un ensemble fini ou dénombrable de solutions (si l'on va jusqu'aux points limites) pour les équations différentiello-fonctionnelles. L'ensemble de solutions dans les deux cas garde la puissance du continu, parce que nous avons choisi librement la fonction arbitraire continue dans l'intervalle initial. Le nombre des branches et des constantes arbitraires nous donne en effet plus de dégrés de libertés, mais en tout cas ne peut pas agrandir la puissance du nombre transfini de solutions qui reste celle du continu. Nous verrons plus loin comment on fait la jointure, plus encore, le raccordage jusqu'à un ordre infini dans les points de passage $x_{\pm n}(x^0)$ et quelle est la puissance de l'ensemble de ses solutions; nous ferons aussi l'étude de la continuité aux points limites.

17. *Continuité*. Commençons l'étude de la continuité pour les solutions des équations fonctionnelles. Rappelons-nous les § 5 et 6 et le graphique à l'aide duquel nous avons construit ces solutions. Soit d'abord l'équation de périodicité pour la transformation $x_1(x)$

(20) $$P[x_1(x)] = P(x).$$

Nous avons vu que nous sommes libres de prendre pour P une fonction (ou arc) arbitraire dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$ et ensuite considérer un point ξ qui parcourt cet intervalle, ainsi que ses itérés de ξ, les $x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots, x_n(\xi)$ définis par $x_{\pm n}(\xi) = x_1[x_{\pm n-1}(\xi)]$ et, nous aurons la solution de l'équation en prenant

$$(20) \qquad P(\xi_1) = P(\xi) = \ldots = P(\xi_{\pm n}).$$

L'ensemble des arcs décrits par $\xi P(\xi)$ et ses itérés $x_{\pm n}(\xi) P(\xi)$ nous donnera une de ces solutions de (20).

Nous voyons que, pour avoir une solution continue, il faut d'abord que l'arc que nous tracerons pour P dans l'intervalle initial $x^0x_1(x^0)$ soit continu, et il faut de plus, que les ordonnées aux extremités de cet arc soient égales pour établir la jonction avec son itéré, donc

$$(21) \qquad P(x^0 - 0) = P(x_1(x^0) + 0).$$

18. Pour les équations non linéaires la jonction s'établit aux points de passage par une relation analogue à (21). Ainsi soit l'équation

$$(22) \qquad y[x_1(x)] = R[x, y(x)].$$

Pour établir la jonction en $x_1(x^0)$, on prendra dans l'intervalle initial pour y un arc continu, avec la seule condition entre les ordonnées de ses extrémités

$$(23) \qquad y[x_1(x^0) + 0] = R[x^0, y(x^0 - 0)];$$

la jonction sera *automatiquement* établie dans tous les points $x_{+n}(x^0)$ tandis que dans les points $x_{-n}(x^0)$ avec celle des branches de l'équation (22) en $y(x)$ qui correspond à l'arc initial choisi.

19. *Domaine de valabilité de la continuité.* L'arc initial étant choisi continu et la jonction faîte aux points de passage, la solution sera continue dans tout intervalle ab donné compris dans un intervalle AB contenant x^0 et où A et B sont deux racines consécutives de l'équation $x = x_1(x)$; mais vers les points limites A et B la solution sera d'un seul trait, mais pas en général continue. Nous reviendrons sur la continuité aux points limites au § 26 et 27.

20. *Raccordage.* On peut établir non seulement la continuité, mais le reccordage jusqu'à l'ordre k dans ces points $x_{\pm n}(x^0)$ si l'on exprime entre les extrémités de l'arc initial les relations qui traduisent les égalités

$$(24) \qquad y^j[x_1(x^0)-0]=y^j[x_1(x^0)+0], \qquad j=0,1,\ldots,k,$$

l'indice j désignant la dérivée d'ordre j.

Ainsi, par exemple, pour l'équation de périodicité (20) on aura pour $j=1$

$$(24') \qquad P'_{x_1}[x_1(x^0)+0]x_1'(x^0)=P'(x^0-0)$$

et pour l'équation (22)

$$(24'') \qquad y'_{x_1}[x_1(x^0)+0]x_1'(x^0)=\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}y'\right)_{x_0-0}.$$

Le raccordage établi en un seul point de jointure $x_1(x^0)$ doit se repercuter dans tous les points de jointure (avec la même branche correspondante) parce que la transformation de x en $x_1(x)$ étant ponctuelle, c'est une transformation de contact. On suppose que la courbe $x_1=x_1(x)$ n'a pas de points anguleux.

21. *Raccord d'ordre infini.* Si dans les équations (24) on prend $k=\infty$, on aura dans les $x_{\pm n}(x^0)$ non seulement la continuité, mais *un raccord d'ordre infini* [1]).

L'ensemble de ces solutions garde encore la puissance du continu, parceque l'arc arbitraire continu, choisi dans l'intervalle initial, arc qui détermine une seule el unique solution de l'équation fonctionnelle, apartient à un ensemble continu; tandis que les conditions (24) forment un ensemble dénombrable, qui regarde un nombre discret de points (un ensemble de mesure nulle, non partout dense) de l'arc continu arbitraire.

22. *Fonction analytique osculatrice.*

Pour un raccordage d'ordre infini au point de jointure nous voyons que nous sommes libres de prendre à notre gré l'allure de l'arc initial à une extrémité, soit en $x_1(x^0+0)$; mais

---

[1]) Nous pouvons même donner des exemples de courbes qui aient dans un intervalle fini des contacts d'ordre infini sur un ensemble partout dense, sans que ces courbes se confondent; plus encore, elles peuvent même se traverser dans le même intervalle sur un second ensemble partout dense.

alors en x^0-0 l'allure de cet arc est déterminée, parce que les équations (24), (24′), (24″) nous montrent que les dérivées $y_0^j(x^0-0)$ en x^0-0 sont déterminées à l'aide des dérivées en $x_1(x^0)+0$. Soit alors la fonction

$$(25) \qquad Y=y_0+(x-x^0)y_0'+\ldots+\frac{(x-x^0)^n}{n!}y_0^n+\ldots$$

Elle peut représenter une fonction analytique, si elle est convergente, mais elle ne représente pas l'arc initial que nous avons raccordé dans le prolongement fonctionnel à son itéré avec un ordre infini (raccordage qui se repercute dans les autres points de jonction). L'expression (25) sera appelée *fonction analytique osculatrice* en x^0 de notre arc initial, qui est en général non analytique.

Il y a aussi parmi les surfaces non analytiques un sous-ensemble de surfaces qui admettent pareillement des surfaces analytiques osculatrices. Je pense que cette question ne manque pas d'interêt.

Continuité des intégrales des équations différentiello-fonctionnelles

23. Nous avons vu au § 13, 14 et 15 comment on construit les intégrales d'une équation différentiello-fonctionnelles par la méthode du prolongement fonctionnel à l'aide du graphique. Ainsi, par exemple, l'équation

$$(19) \qquad \frac{d^ky(x)}{dx^k}=a(x)y[x_1(x)]$$

s'intègre ainsi: On assigne a y une fonction (ou arc) arbitrairement choisie dans un intervalle initial $x^0x_1(x^0)$. Alors dans les intervalles $x_n(x^0)x_{n+1}(x^0)$ itérés positifs de $x^0x_1(x^0)$ la traduction graphique de notre équation (19) nous montre que l'on aura successivement dans chaque intervalle

$$(19') \qquad y_n(x)=y[x_n(x)]=\frac{d^ky[x_{n-1}(x)]}{[dx_{n-1}(x)]^k}:a[x_{n-1}(x)]$$

donc une solution unique; mais cette solution ne sera pas en générale continue aux points de jointure $x_n(x^0)$. On établit la

continuité au point $x_1(x^0)$ en prenant, aux extrémités de l'arc initial la relation

$$(26)\qquad y[x_1(x^0)+0]=\frac{d^k y[x^0-0]}{(dx^0)^k}:a(x^0-0)$$

c'est-à-dire une relation entre la fonction initiale à l'extrémité gauche et sa dérivée k à l'extremité droite. En continuant la jonction dans $x_2(x^0)$ on doit imposer la même relation aux extremités du prolongement fonctionnel de l'arc dans $x_1(x^0)x_2(x^0)$, ce qui se repercute par une autre relation entre la dérivée d'ordre $2k$ et la fonction initiale aux entrémités de l'arc initial. Dans chaque intervalle il reste donc $k-1$ dérivées libres aux points de passage. Jusqu'au point $x_n(x^0)$ il faudra satisfaire à n relations entre les nk dérivées aux extrémités de l'arc initial; mais entre ces extrémités l'arc initial reste arbitraire. Nous pouvons le tracer continu. On aura alors une solution continue depuis x^0 jusqu'à $x_n(x^0)$. Si nous continuons la jonction vers le point attractif $A=\lim x_n(x^0)$, $n\to\infty$, nous aurons une solution *d'un seul trait*, mais qui ne sera pas généralement continue vers A. Elle pourra devenir non bornée, ou même si elle reste bornée, elle pourra avoir vers A une variation totale infinie et dans ce dernier cas on ne peut pas affirmer qu'elle sera surement discontinue, parce que nous verrons qu'il peuvent exister des *fonctions continues* dans le voisinage d'un point et pourtant *à variation totale infinie* en s'approchant de ce point.

L'ensemble de ces solutions d'un seul trait aura la puissence du continu, comme pour le cas du raccordage d'ordre infini dans le § 17 et pour les mêmes raisons.

S'il existe une solution analytique, elle dépendra de k constantes arbitraires.

Il en resulte que les équations fonctionnelles linéaires pures n'admettent que, au plus, une solution analytique (avec une constante arbitraire). Ainsi

$$P(x)=P[x_1(x)],\qquad P=C$$

$$af(x)=f(ax),\qquad f=Cx^r \text{ si } r=\frac{La}{La} \text{ est entier}$$

$$ax^rf(x)=f(ax^p),\qquad f=cx^q \text{ si } q=\frac{r}{p-1} \text{ est entier et } a=a^q.$$

Exception font certaines équations de construction spéciale comme $f(x+\lambda)=f(x)$, fonctions circulaires de période $2\pi/\lambda$ dont une infinité sont analytiques, $f(x)\pm f(-x)=0$, fonction impaire ou paire.

24. *Continuité vers les itérés négatifs.* L'équation (19), qu'on peut écrire sons la forme:

$$(19_1) \qquad \frac{d^k y[x_{-1}(x)]}{d[x_{-1}(x)]^k}=a[x_{-1}(x)]y(x)$$

nous montre que si nous connaissons $y(x)$ c'est-à-dire y entre x^0 et $x_1(x^0)$, on aura $y(x_{-1})$ non directement, mais par sa dérivée k-ième, donc il s'introduisent k constantes arbitraires, qu'il faut choisir pour déterminer y quand on passe d'un intervalle à son itéré contigu dont l'indice est diminué de 1. Alors après avoir choisi l'arc initial, il suffit d'une de ces constantes, à chaque passage, pour établir la jonction. Il reste disponibles $k-1$ constantes à chaque passage. On pourrait les employer pour satisfaire à différentes conditions initiales.

On peut également se servir soit pour la jonction, soit pour d'autres conditions initiales, en imposant des relations correspondantes entre les dérivées aux extrémités de l'arc initial. Les solutions continues vers les itérés négatifs forment aussi un ensemble de puissance de continu.

Le nombre croissant, à devenir dénombrable, de constantes arbitraires qui s'ajoutent au point limite répulsif ne change pas la puissance de l'ensemble.

25. *Passage des équations différentiello-fonctionnelles aux équations intégrales.*

Si l'on intègre $p\gtreqless k$ fois une équation fonctionnello-différentielle d'ordre k, comme par ex. (19), on aura une équation intégrale, ou intégro-différentiello-fonctionnelle. A chaque intégration s'introduit une constante qu'on peut assujetir pour satisfaire telle condition initiale. Supposons que nous avons un nombre p de conditions à satisfaire dans p points x^j dont aucun n'est point limite des x_n. Il nous faut p constantes arbitraires. Nous avons plusieurs moyens pour les obtenir: 1⁰ On peut imposer p conditions ponctuelles convenablement choisies à l'arc arbitraire que nous pouvons prendre dans n'importe

quel intervalle initial, 2⁰ on peut choisir l'intervalle initial assez près du point limite attractif pour que, en faisant le prolongement fonctionnel vers les itérés négatifs de cet intervalle, on arrive à chaque point x^0 de l'intervalle d'intégration avec le nombre de constantes libres d'intégration nécessaires pour satisfaire nosc onditions en x^j. Exemple: si $p=mk+r$ et p conditions en x^1, on choisira x^0 tel que $x_{-m}(x^0)<x^1$.

26. *Conditions aux points limites. Compatibilité.* Il arrive des fois que l'équation fonctionnelle, ou fonctionnello-différentielle, à laquelle nous avons réduit l'équation intégrale soit par intégration par parties, soit par dérivations, admette des solutions, même une infinité, mais dont aucune ne satisfasse pas l'équation intégrale de départ. Exemple: l'équation intégrale de notre problème d'hydrostatique

$$\int_0^{x_1(x)} S(y)\,dy-\int_0^x \varrho(x)\,S(y)\,dy=p(x) \tag{3}$$

qui se réduit à

$$V[x_1(x)]-\varrho(x)V(x)=p(x),\quad V(x)=\int_0^x S(y)\,dy \tag{3'}$$

par la nature des choses $0<x_1(x)<x$ parce que x c'est la hauteur de vase et $x_1(x)$ celle de la ligne de flottaison par rapport au fond. Donc $x_1(0)=0$ alors (3′) nous exige

$$V(0)=\frac{p(0)}{1-\varrho(0)}$$

pour toutes les solutions de (3′) et nous avons vu qu'il en existent une infinité dépendant d'une fonction arbitraire. Or, si $p(0)\neq 0$, alors $\int_0^x S(y)\,dy=V(x)$ doit être différent de zéro pour $x=0$. Quelle est alors la fonction $S(y)$? [1]).

---

[1]) Malgré toutes les apparences, la condition $p(0)=0$ n'est qu'artificielle, parce que c'est une simple exigeance analytique, qui ne tient pas compte de la réalité physique. La réalité c'est qu'il faut prendre $p(0)\neq 0$ parce qu'il faut doter le fond du vase d'un minimum d'épaisseur a. Il faut donc prendre $\int_a^x S(y)\,dy=V(x)$ et $V(0)\neq 0$ le considérer comme faisant partie de cargaison. Dans la physique, il arrive des fois qu'il faut quitter l'analyse différentielle pour l'analyse fonctionnelle, comme dans la théorie des chaleurs spécifiques des solides à basses temperatures, les quanta etc.

Lorsque $p(0)=0$, alors on a effectivement une infinité de solutions. Aussi lorsque $p(0)=0$ avec $\varrho(0)=1$. Il est intéressant de remarquer que l'équation (3') admet des solutions même si $\varrho(0)=1$ avec $p(0)\neq 0$, mais ces solutions ne sont pas uniformes.

En général, l'allure des solutions aux points limites se voit sur l'équation même. Ainsi par ex. l'équation (18) peut s'écrire

$$(18') \quad f(x)[t'(x)-t'(0)]+c[x-x_1(x)]t'(x)-c[t(x)-t[(x_1(x)]]=p(x).$$

On voit que, pour qu'elle admette des solutions continues au point $x=0$, il est nécessaire que $p(0)=0$ et que, si $f(0)\neq 0$, il faut que $t'(0)$ ait une valeur finie, ce qui n'exige pas nécessairement que $t'(x)$ soit continue pour $x=0$. Enfin pour que la solution aie un sens physique pour notre problème, il faut que t'' existe parce que $t''(y)=S(y)$.

27. *Continuité aux points limites.* Nous avons vu que nous pouvons construire une infinité de solutions continues dans tout intervalle $A+\varepsilon$, $B-\eta$, A et B étant deux racines consécutives de l'équation $x=x_1(x)$, ε et η aussi petits qu'on le veut. L'ensemble de ces solutions, nous l'avons vu, aura la puissance du continu. Aux points limites A et B les solutions présentent différents caractères: Il y a à la fois des solutions continues et d'autres discontinues. Dans d'autres cas toutes les solutions doivent présenter en un des deux points limites, où dans les deux, des singularités essentielles. Il y a des cas où toutes les solutions, même celles qui étaient discontinues dans $A+\varepsilon$, $B-\eta$ deviennent continues et, ce qui est curieux, même les solutions qui n'étaient pas d'un seul trait deviennent continues. D'autres cas où toutes solutions deviennent continues vers le point limite en s'y approchant tout de même avec une variation totale infinie. Nous allons faire voir sur des exemples simples ces genres curieux de singularités.

28. *Singularités essentielles.* Soit à intégrer l'équation fonctionnelle

$$(9) \qquad \varphi(x)-a(x)\varphi[x_1(x)]=0.$$

Nous avons donné la solution générale de cette équation sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \prod^{n} (u_n - u_{n-1})^{\alpha} (v_{-n} - v_{-n+1})^{\beta}$$

où $\prod^{n} = a a_1 \ldots a_{n-1}$, $\prod^{-n} = 1 : a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n}$, $a_{\pm n}$ comme toujours $a[x_{\pm n}]$ avec $x_{\pm n} = x_1[x_{\pm n-1}]$, u et v deux fonctions arbitraires qu'on peut choisir pour la convergence, α et β nombres convenablement choisis dans le même but.

Nous avons aussi vu (§ 5) qu'on peut prendre pour φ un arc arbitraire dans un intervalle $x^0 x_1(x^0)$ avec x^0 arbitraire. Cherchons l'allure de φ au point limite attractif $x = A$; on aura

$$\varphi_n = \frac{\varphi}{a a_1 \ldots a_{n-1}}. \tag{9'}$$

Par suite, si le produit $\prod^{n} = a \cdot a_1 \ldots a_{n-1}$ est convergent vers une limite pour $n \to \infty$ et si x_n tend *uniformément* vers une limite A, alors dans chacun des très petits espaces $x_n(x^0)\, x_{n+1}(x^0)$ toute solution de (9) devra avoir une variation totale du même ordre que dans l'intervalle initial. Donc, même les solutions qui ont été continues dans $A + \varepsilon$, $B - \eta$ seront discontinues lorsque x tend vers A, mais finies et d'un seul trait.

Une équation différentiello-fonctionnelle telle que (18) peut admettre à côté des solutions continues en A des solutions dont A peut être un point singulier essentiel, comme (8).

Si $\prod^{n}$ tend vers zéro, $\varphi(x_n)$ tend vers l'infini.

29. *Fonctions à crépitations.* Supposons que $\prod^{n}$ tende vers l'infini. Alors, vu (9′), *toutes* les solutions de (9), même celles discontinues, et même celles qui *ne sont pas d'un seul trait*, tendent vers zéro au point limite attractif A. Rappellons nous maintenant la définition classique de la continuité et notamment celle de continuité à droite: Une fonction est continue à droite d'un point A si, δ étant un nombre positif arbitrairement donné, il existe un nombre positif ε tel que

$$|f(A) - f(A + \varepsilon')| < \delta \tag{c}$$

pour tout nombre positif $\varepsilon' < \varepsilon$. Or cette relation de „continuité" sera satisfaite même pour les solutions de (9) qui

ne sont pas d'un seul trait entre $A+\varepsilon$ et $B-\eta$; par ex., si l'on n'a pas fait le jonction aux points de passage $x_n(x^0)$. Donc la relation de continuité (c) peut être satisfaite pour un fonction lorsque la variable tend vers une limite A sans que la fonction soit obligée à prendre toujours toutes les valeurs intermédiaires entre deux valeurs. La fonction aura des sauts qui tendent rapidement vers zéro comme les crépitations d'un courant qui traverse des fils séparés par des diélectriques dont l'épaisseur tend vers zéro.

30. *Fonctions continues à droite d'un point et pourtant à variation totale infinie lorsque la variable approche ce point.*

Supposons une fonction, d'un seul trait ou non, qui dans chaque intervalle $x_n x_{n+1}$ a une variation totale v_n. Supposons ensuite que les intervalles $x_n x_{n+1}$, sont les termes d'une série absolument covergente, tandis que les v_n tendent vers zéro mais ils sont les termes d'une série divergente; alors notre fonction satisfaira à la relation de *continuité* (c) et pourtant sa *variation totale sera infinie* lorsque x approche A.

On peut composer des exemples d'équations fonctionnelles dont toutes les solutions jouissent de cette propriété. Ex.: si dans l'équation (9) on prend $a=\dfrac{1+kLx_1(x)}{1+kLx}$ où $x_1(x)=x\psi(x)$, $\psi(x_n)\rightarrow a$ (constante), L=logarithme.

31. *Cas où un point limite est à l'infini.* En d'autres termes la courbe $y=x_1(x)$ admet une direction assymptotique $y=x$. Proposons nous d'étudier l'allure des solutions vers la direction asymptotique. Supposons que $\prod^{n}$ admet une limite. Alors si $y=x$ est une direction asymptotique sans être une asymptote, la variation totale de φ dans un intervalle $x_n x_{n+p}$ reste finie pour p fini (ou de l'ordre de p); pour n infini nous dirons que l'infini A est un point régulier de la solution. Si $y=x$ est effectivement une asymptote, le rapport entre la variation totale de la solution et l'intervalle de variation $x_n x_{n+p}$ est infini, même si la fonction y reste finie; nous dirons que l'infini A est un point de singularité essentielle pour les solutions, même pour celles qui sont finies et continues.

Nous voyons quelle variété des singularités se présente dans cette étude dont nous avons donné un aperçu.

SUR UN THÉORÈME CONCERNANT LES FONCTIONS AU CARRÉ SOMMABLE

Par Otton Nikodym, Warszawa

1. La note présente est consacrée à la démonstration du théorème suivant:

Si $f(x)$ est une fonction complexe, définie presque partout dans $\langle 0,1\rangle$ et au carré sommable, il existe dans $\langle 0,1\rangle$ un ensemble épais[1]) dont chaque point x_0 jouit de la propriété suivante:

$$\lim_n \frac{1}{x_n''-x_n'}\int_{x_n'}^{x_n''}|f(x)-f(x_0)|^2\,dx=0$$

quelles que soient les suites infinies $\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$, où

$$0\leqslant x_n'<x_0<x_n''\leqslant 1,$$
$$\lim_n x_n'=\lim_n x_n''=x_0.$$

La démonstration qui va suivre est basée sur le théorème connu de Vitali (Überdeckungssatz).

Supposons, par impossible, que le théorème n'est pas vrai. Il existe alors un ensemble A, où $\operatorname{mes\,ext} A>0$, tel que, si $x_0\in A$, il existe des suites infinies $\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$, où $0\leqslant x_n'<x_0<x_n''\leqslant 1$, $x_n'\to x_0$, $x_n''\to x_0$ et il existe un nombre $a>0$, tels que

$$\frac{1}{x_n''-x_n'}\int_{x_n'}^{x_n''}|f(x)-f(x_0)|^2\,dx>a, \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{1}$$

---

[1]) C'est-à-dire, de mesure$=1$.

En vertu de l'axiome de M. ZERMELO, on peut, à tout point $x_0 \epsilon A$, faire correspondre un couple de suites infinies $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ et un nombre $\alpha=\alpha(x_0)>0$ de manière que (1) ait lieu. Il existe certainement un sous-ensemble A' de A tel que $\text{mes ext}\, A'>0$ et dans lequel $\alpha(x_0)$ surpasse un nombre positif fixe.

En effet, désignons par A_m l'ensemble $\hat{x}_0\{\alpha(x_0)>1/m\}$.

Si l'on avait $\text{mes ext}\, A_m=0$ pour chaque m, on aurait $\text{mes}\, A=\text{mes} \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m \leqslant \sum\limits_{m=1}^{\infty} \text{mes}\, A_m=0$, ce qui est impossible.

Soit donc $A'\subset A$ tel que $\text{mes ext}\, A'>0$,

(2) $$\frac{1}{x''_n-x'_n}\int_{x'_n}^{x''_n}|f(x)-f(x_0)|^2\, dx>\alpha'>0$$

pour tout $x_0 \epsilon A'$ et pour des suites $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ convenablement choisies pour chaque x_0.

2. La fonction $f(x)$ étant mesurable, on peut, d'après un théorème de M. N. LUSIN, trouver pour chaque nombre $\sigma>0$ un sousensemble parfait B_σ de $\langle 0,1\rangle$ dans lequel $f(x)$ est bornée et continue sur B_σ et par rapport à B_σ, et où

$$1-\sigma<\text{mes}\, B_\sigma\leqslant 1.$$

Choisissons σ de manière qu'on ait

(3) $$\sigma<\text{mes ext}\, A'/2$$

et trouvons un ensemble B_σ parfait y correspondant. On a

(4) $$\text{mes ext}\,(A'B_\sigma)>0,$$

car dans le cas contraire on aurait

$$\text{mes}\,(A'B_\sigma)=0, \qquad A'=A'B_\sigma+A'\text{co}\, B_\sigma,$$
$$\text{mes ext}\,(A'\text{co}\, B_\sigma)\leqslant\text{mes}\,(\text{co}\, B_\sigma)<\sigma$$

ce qui donnerait

$$\text{mes ext}\, A'\leqslant\text{mes ext}(A'B_\sigma)+\text{mes ext}(A'\text{co}\, B_\sigma)\leqslant\sigma$$

et, par conséquent,

$$\text{mes ext}\, A'<\frac{\text{mes ext}\, A'}{2},$$

ce qui est absurde.

Posons

(5) $$A'' \underset{\text{df}}{=} A'B_\sigma.$$

On a, d'après (4):

(6) $$\operatorname{mes\,ext} A'' > 0, \qquad A'' \subset B_\sigma, \qquad A'' \subset A'.$$

La fonction $f(x)$ étant continue sur B_σ et par rapport à B_σ, elle y est aussi uniformément continue. À fortiori $f(x)$ est uniformément continue sur A'' par rapport à A''.

3. La fonction $f(x)$ étant bornée sur B_σ, supposons que

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{sur} \quad B_\sigma.$$

Soit E un ensemble mesurable et soit $x_0 \in A''$. On a

$$\int_E |f(x) - f(x_0)|^2 dx = \int_E (\overline{f(x)} - \overline{f(x_0)})(f(x) - f(x_0))\, dx =$$
$$= \int_E |f(x)|^2 dx + |f(x_0)|^2 \operatorname{mes} E - \int_E \overline{f(x_0)} f(x)\, dx - \int_E \overline{f(x)} f(x_0)\, dx,$$

d'où

$$\int_E |f(x) - f(x_0)|^2 dx = \left| \int_E |f(x) - f(x_0)|^2 dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_E |f(x)|^2 dx + M^2 \operatorname{mes} E + 2 \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx \cdot M^2 \operatorname{mes} E}$$

et, par conséquent,

(7) $$\int_E |f(x) - f(x_0)|^2 dx \leqslant 2 \int_E |f(x)|^2 dx + 2M^2 \operatorname{mes} E.$$

L'inégalité qui vient d'être obtenue montre que

$$\lim \int_E |f(x) - f(x_0)|^2 dx = 0$$

lorsque $\operatorname{mes} E \to 0$ et, de plus, que la dite convergence est uniforme. Cela veut dire que, étant donné un nombre $\eta' > 0$, on peut trouver un nombre $\eta'' > 0$ tel que la relation $\operatorname{mes} E < \eta''$ entraîne:

$$\int_E |f(x) - f(x_0)|^2 dx < \eta',$$

et cela quel que soit $x_0 \in A''$.

4. La fonction $f(x)$ étant uniformément continue sur B_σ, on peut, en fixant un nombre $\varepsilon>0$ d'avance, trouver un nombre $\delta>0$ tel que, si $y_1-y_2<\delta$, $y_1 \epsilon B_\sigma$, $y_2 \epsilon B_\sigma$, on ait $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$.

Les intervalles (x'_n, x''_n) enfermant les points x_0 de A'' [voir (2)], représentent une famille de VITALI[1]) pour A'', même si l'on suppose que $|x'_n-x''_n|<\delta$.

Donc, si l'on choisit un nombre $\eta>0$, on peut, d'après le théorème de VITALI, trouver une suite finie d'intervalles disjoints

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k \tag{8}$$

appartenant à la famille et tels que

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{k} \text{mes}\, \Delta_i - \eta \leqslant \text{mes ext}\, A'' \leqslant \\ \leqslant \text{mes ext}\,(A'' \cdot \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) + \eta \leqslant \text{mes} \sum_{i=1}^{k} \Delta_i + \eta.\end{gathered} \tag{9}$$

5. Aux intervalles (8) correspondent certaines points $y_1, \ldots, y_k$ de l'ensemble A''.

En vertu de (2) on a:

$$\frac{1}{\text{mes}\, \Delta_i} \int_{\Delta_i} |f(x)-f(y_i)|^2 dx > \alpha'.$$

donc, d'après (9):

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i} |f(x)-f(y_i)|^2 dx > \alpha' \sum_{i=1}^{k} \text{mes}\, \Delta_i \geqslant \alpha' (\text{mes ext}\, A'' - \eta). \tag{10}$$

On peut écrire:

$$\int_{\Delta_i} |f(x)-f(y_i)|^2 dx = \int_{\Delta_i \cdot B_\sigma} + \int_{\Delta_i - B_\sigma}. \tag{11}$$

Comme la longueur de Δ_i est $<\delta$, on a conformément à **4**,

$$\int_{\Delta_i B_\sigma} |f(x)-f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\Delta_i B_\sigma} \varepsilon^2\, dx \leqslant 2\varepsilon^2\, \text{mes}\, \Delta_i,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i B_\sigma} |f(x)-f(y_i)|^2 dx \leqslant 2\varepsilon^2. \tag{12}$$

---

[1]) Voir p. ex. S. Saks. *Zarys Teorii Całki.* Warszawa 1930, p. 46.

D'après (9):

$$\operatorname{mes}(B_\sigma \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) \geqslant \operatorname{mes\,ext}(A'' \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \operatorname{mes} \Delta_i - 2\eta,$$

donc

$$\operatorname{mes} \sum_{i=1}^{k} \Delta_i - \operatorname{mes}(B_\sigma \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) \leqslant 2\eta$$

et, par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{mes}(\Delta_i - B_\sigma) \leqslant 2\eta. \tag{13}$$

En appliquant l'inégalité (7), on a

$$\int_{\Delta_i - B_\sigma} |f(x) - f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\Delta_i - B_\sigma} |f(x)|^2 dx + 2M^2 \operatorname{mes}(\Delta_i - B_\sigma);$$

donc, d'après (13):

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i - B_\sigma} |f(x) - f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\sum\limits_{i=1}^{k}(\Delta_i - B_\sigma)} |f(x)|^2 dx + 4M^2\eta. \tag{14}$$

Les inégalités (12) et (14) donnent, en vertu de (11),

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i} |f(x) - f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\sum\limits_{i=1}^{k}(\Delta_i - B_\sigma)} |f(x)|^2 dx + 4M^2\eta + 2\varepsilon^2.$$

Il en résulte, d'après (10):

$$\alpha'(\operatorname{mes\,ext} A'' - \eta) \leqslant 2 \int_{\sum\limits_{i}(\Delta_i - B_\sigma)} |f(x)|^2 dx + 4M^2\eta + 2\varepsilon^2. \tag{15}$$

La fonction $f(x)$ étant au carré sommable, l'intégrale, figurant dans le membre droit tend uniformément vers 0 lorsque $\eta \to 0$, puisque, d'après (13), on a $\operatorname{mes} \sum_{i=1}^{k} (\Delta_i - B_\sigma) \leqslant 2\eta$.

Les nombres $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ sont arbitraires. En les faisant tendre vers 0, on obtient de (15):

$$\alpha' \cdot \operatorname{mes\,ext} A'' \leqslant 0;$$

donc $\operatorname{mes\,ext} A'' = 0$ contrairement à (6). Le théorème est ainsi démontré.

6. Remarquons que le théorème analogue est valable pour les fonctions $f(x,y)$ de deux variables indépendantes, à condition qu'on remplace les intervalles (x'_n, x''_n) par des carrés centrés en x_0.

Le théorème démontré va trouver des applications dans des travaux ultérieurs de l'auteur, concernant les espaces de HILBERT.

Remarquons que, si $f(x)$ est continue et aux dérivées bornées, on peut démontrer, à l'aide du théorème classique de l'HOSPITAL, que

$$\lim_n \frac{1}{(x''_n - x'_n)^2} \int_{x'_n}^{x''_n} |f(x) - f(x_0)|^2 \, dx = 0$$

pour chaque $x_0 \epsilon (0,1)$.

COMPTES-RENDUS
DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE
1938
JANVIER — JUIN

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

BUREAU CENTRAL

Président de la Société: Prof. Dr Stefan Mazurkiewicz.

Vice-Présidents de la Société: Présidents des Sections de Cracovie, de Lwów, de Poznań et de Wilno.

Secrétaire de la Société: Doc. Dr Bronisław Knaster.

Trésorier de la Société: Prof. Dr Władysław Orlicz.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Samuel Dickstein, Prof. Dr Franciszek Leja, Prof. Dr Kazimierz Żórawski.

SECTION DE CRACOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Stanisław Zaremba.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Franciszek Leja.

Secrétaire de la Section: Dr Stanisław Turski.

Trésorier de la Section: Doc. Dr Stanisław Gołąb.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Antoni Hoborski, Prof. Dr Witold Wilkosz, Doc. Dr Stanisław Krystyn Zaremba.

Commision de Contrôle: Dr Henryk Titz, Prof. Dr Tadeusz Ważewski, Ing. Dr Kazimierz Vetulani.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Stanisław Zaremba, Prof. Dr Franciszek Leja, Doc. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Witold Wilkosz.

Suppléants des Délégués: Doc. Dr Aleksander Birkenmajer, Prof. Dr Antoni Hoborski.

SECTION DE LWÓW

Président de la Section: Prof. Dr Stanisław Ruziewicz.

Vice-Président de la Section: Doc. Dr Stefan Kaczmarz.

Secrétaire de la Section: Mgr Andrzej Turowicz.

Trésorier de la Section: Dr Edward Otto.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Stefan Banach, Doc. Dr Juliusz Paweł Schauder.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Lucjan Grabowski, Prof. Dr Hugo Steinhaus.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr S. Banach, Doc. Dr S. Kaczmarz, Prof. Dr A. Łomnicki, Prof. Dr W. Orlicz, Doc. Dr J. Schauder.

SECTION DE POZNAŃ

Président de la Section: Prof. Dr Mieczysław Biernacki.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Władysław Smosarski.

Secrétaire de la Section: Dr Lidia Seipeltówna,

Trésorier de la Section: Dr Kazimierz Cwojdziński.

Membre du Bureau de la Section: Mgr Klara Krużycka.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Józef Witkowski, Prof. Gimn. Andrzej Marconi.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Zdzisław Krygowski, Doc. Dr Władysław Ślebodziński.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Józef Witkowski, Mgr Zygmunt Butlewski.

SECTION DE VARSOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Kazimierz Kuratowski.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Secrétaire de la Section: Dr Edward Szpilrajn.

Trésorier de la Section: Doc. Dr Adolf Lindenbaum.

Membres du Bureau de la Section: Doc. Dr Karol Borsuk, Prof. Dr Stefan Mazurkiewicz, Prof. Dr Wacław Sierpiński.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Samuel Dickstein, Prof. Dr Antoni Przeborski, Dr Aleksander Grużewski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Doc. Dr Bronisław Knaster, Prof. Dr Kazimierz Kuratowski, Doc. Dr

Stanisław Saks, Prof. Dr Wacław Sierpiński, Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Suppléants des Délégués: Doc. Dr Karol Borsuk, Dr Edward Szpilrajn, Doc. Dr Adolf Lindenbaum, Doc. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

SECTION DE WILNO

Président de la Section: Prof. Dr Juliusz Rudnicki.

I Vice-Président (Trésorier): Prof. Dr Stefan Kempisty.

II Vice-Président (Secrétaire): Prof. Dr Antoni Zygmund.

Suppléant du Trésorier: Dr Mirosław Krzyżański.

Suppléant du Secrétaire: Mgr Konstanty Sokół-Sokołowski.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Wacław Dziewulski, Prof. Dr Kazimierz Jantzen, Konstanty Matulewicz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Antoni Zygmund, Prof. Dr Stefan Kempisty.

Suppléant des Délégués: Prof. Dr Juliusz Rudnicki.

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Signes: (C)=Cracovie, (L)=Lwów, (P)=Poznań, (V)=Varsovie, (W)=Wilno.

(V) Alexandroff Paul, Prof. Dr, *Moskwa* 6 (U. R. S. S.), Staropimenowski per. 8 kw. 5

(V) Archibald R. C., Prof. Dr, *Providence* (R. I., U.S.A.), Brown University.

(V) Aronszajn Natan, Dr, *Paris 12* (France), rue Sibuet 52.

(L) Auerbach Herman, Doc. Dr, *Lwów*, ul. Domagaliczów 8.

(L) Banach Stefan, Prof. Dr, *Lwów*, ul. Zyblikiewicza 23.

(C) Banachiewicz Tadeusz, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Kopernika 27, Obserwatorium Astronomiczne.

(C) Baran Jan, *Toruń*, Małe Garbary, Gimnazjum Męskie.

(C) Barnett I. A., Prof. Dr, *Cincinnati* (Ohio, U. S. A.), University.

(L) Bartel Kazimierz, Prof. Dr, *Lwów*, ul. Herbertów 5.

(V) Bary Nina, Prof. Dr, *Moskwa* (U. R. S. S.), Pokrowka 29 kw. 22.

(V) Bergman Stefan, Prof. Dr, *Paris 5* (France), rue Denfert-Rochereau 33.

(V) Białobrzeski Czesław, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Akademicka 3 m. 13.

(C) Bielecki Adam, Dr, *Kraków*, ul. Syrokomli 17.
(P) Biernacki Mieczysław, Prof. Dr, *Poznań*, ul. Jeżycka 36.
(C) Birkenmajer Aleksander, Doc. Dr, *Kraków*, Uniwersytet Jagielloński.
(L) Birnbaum Zygmunt, Dr, *New-York* (U. S. A.), Intern. House, Riverside drive 500.
(W) Blaton Jan, Doc. Dr, *Warszawa*, Państwowy Instytut Meteorologiczny.
(L) Blumenfeld Izydor, Ing. Dr, *Lwów*, ul. Kąpielna 6.
(V) Borsuk Karol, Doc. Dr, *Warszawa*, ul. Oczki 3, Seminarium Matematyczne.
(C) Bouligand Georges, Prof. Dr, *Poitiers* (Vienne, France), rue Renaudot 50.
(V) Braunówna Stefania, Mgr, *Warszawa*, ul. Marszałkowska 91.
(P) Butlewski Zygmunt, Dr Prof. Gimn., *Poznań*, ul. Kwiatowa 3.
(C) Cartan Elie, Prof. Dr, *Le Chesnay* (Seine et Oise, France), Av. de Montespan 27.
(V) Charzyński Zygmunt, *Warszawa*, Saska Kępa, ul. Francuska 3 A m. 2.
(V) Chromiński Antoni, *Warszawa*, Politechnika, Wydział Inżynierii Lądowej.
(L) Chwistek Leon, Prof. Dr, *Lwów*, ul. Tarnowskiego 82.
(C) Cotton Emile, Prof. Dr, *Grenoble* (Isère, France), place St. Laurent.
(P) Cwojdziński Kazimierz, Dr Prof. Gimn., *Poznań*, Hotel Polonia.
(W) Czernik Tadeusz, Mgr, *Wilno*, Aleja Róż 4.
(C) Čech Eduard, Prof. Dr, *Brno* (Č. S. R.), ul. Nova 49.
(C) Delsarte Jean, Maître de Conférences, *Nancy* (Meurthe et Moselle, France), rue Saint-Michel 35.
(V) Dickstein Samuel, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Marszałkowska 117.
(C) Dniestrzański Roman, Mgr, *Kraków*, ul. Łobzowska 15.
(P) Dobrzycki Stanisław, Mgr, Prof. Gimn., *Poznań*, ul. Matejki 53.
(C) Dollon Jean, Prof. Dr, *Nancy* (Meurthe et Moselle, France), Lycée Poincaré.

(C) Durand Georges, *Toulouse* (Haute Garonne, France), rue du Dix Avril 87.
(W) Dziewulski Wacław, Prof. Dr, *Wilno*, ul. Zakretowa 21.
(C) Echegaray André, Prof. Dr, *Lima* (Peru), Universitad Mayor de San Marcos.
(L) Eidelheit Maks, Mgr, *Lwów*, ul. Zielona 53.
(V) Eilenberg Samuel, Dr, *Warszawa*, ul. Twarda 11.
(V) Errera Alfred, Prof. Dr, *Uccle* (Belgique).
(C) Fijoł Kazimierz, *Kraków*, ul. Krupnicza 2, Gimnazjum IV.
(C) Flamant Paul, Prof. Dr, *Strasbourg* (Bas Rhin, France), rue Schweighauser 35.
(V) Fogelson Samuel, Mgr, *Warszawa*, ul. Leszno 60 m. 37.
(V) Garcia Godofredo, Prof. Ing., *Lima* (Peru), Arpadado 1979.
(C) Godeaux Lucien, Prof. Dr, *Liège* (Belgique), rue Fréderic Nyst 75.
(C) Gołąb Stanisław, Doc. Dr, *Kraków*, ul. Lenartowicza 3.
(L) Grabowski Lucjan, Prof. Dr, *Lwów*, ul. Ossolińskich 6.
(V) Greniewski Henryk, Dr, *Warszawa*, ul. Opaczewska 54 m. 12.
(L) Gruder Henryk, Dr, *Lwów*, ul. Kopernika 14.
(V) Grużewska Halina, Dr, *Warszawa*, ul. Natolińska 8.
(V) Grużewski Aleksander, Dr, *Warszawa*, ul. Natolińska 8.
(V) Hartman Stanisław, Mgr, *Warszawa*, ul. Czackiego 8.
(C) Härlen Hasso, Dr, *Marseburg* (Deutschland), Gutenbergstr. 8.
(L) Hetper Władysław, Dr, *Lwów*, ul. Balzera 20.
(C) Hoborski Antoni, Prof. Dr, *Kraków*, pl. Jabłonowskich 3.
(V) Huber Maksymilian, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Koszykowa 75A.
(V) Hurewicz Witold, Doc. Dr, *Princeton* (N. J., U. S. A.), Fine Hall.
(L) Infeld Leopold, Doc. Dr, *Princeton* (N. J., U. S. A.), Fine Hall.
(P) Jackiewicz Zygmunt, Mgr, Prof. Gimn., *Poznań*, ul. Młyńska 10.
(V) Jacob Marian, Dr, *Warszawa*, ul. Złota 7.
(C) Janet Maurice, Prof. Dr, *Caën* (Calvados, France), rue de la Délivrande 7.
(C) Janik Wincenty, *Kraków*, ul. Pierackiego, Gimnazjum.

(W) Jantzen Kazimierz, Prof. Dr, *Wilno*, ul. Jakuba Jasińskiego 6.
(V) Jaśkowski Stanisław, Dr, *Warszawa*, ul. Mariensztat 5.
(L) Kac Marek, Dr, *Lwów*, ul. Balzera 20.
(L) Kaczmarz Stefan, Doc. Dr, *Lwów*, ul. Pełczyńska 17.
(L) Kalicun-Chodowicki Bazyli, Dr, *Zimna Woda* pod Lwowem.
(C) Kampé de Fériet Joseph, Prof. Dr, *Lille* (Nord, France), rue des Jardins 16.
(W) Kempisty Stefan, Prof. Dr, *Wilno*, ul Zamkowa 11, Seminarium Matematyczne.
(V) Kerner Michał, Dr, *Warszawa*, ul. Pańska 20 m. 17.
(V) Kierst Stanisław, *Warszawa*, ul. Śniadeckich 9.
(V) Kline J. R., Prof. Dr, *Philadelphia* (U. S. A.), University of Pensylvania.
(V) Knaster Bronisław, Doc. Dr, *Warszawa*, ul. Narbutta 9 m. 3.
(V) Kobrzyński Zygmunt, Dr, *Pruszków* pod Warszawą, ul. Graniczna 4.
(V) Kołodziejczyk Stanisław, Dr, *Warszawa*, ul. Miodowa 23, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Zakład Statystyki.
(V) Kozakiewicz Wacław, Dr, *Warszawa*, ul. Tamka 21.
(V) Koźniewski Andrzej, Mgr, *Warszawa*, ul. Sękocińska 16 m. 19.
(P) Krużycka Klara, Mgr, *Poznań*, ul. Szamarzewskiego 11.
(P) Krygowski Zdzisław, Prof. Dr, *Poznań*, ul. Focha 54.
(W) Krzyżański Mirosław, Dr, *Wilno*, ul. Połocka 4 m. 9.
(V) Kuratowski Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Polna 72 m. 10.
(V) Kwietniewski Stefan, Dr, *Warszawa*, ul. Oczki 3, Seminarium Matematyczne.
(C) Labrousse Léon, Prof. Dr, *Paris 7* (France), rue Léon Vaudoyer 7.
(C) Lainé Edouard, Prof. Dr, *Angers* (Maine et Loire, France), rue de Rabelais 3.
(C) Lebesgue Henri, Prof. Dr, *Paris 11* (France), rue St. Sabin 35 bis.
(C) Lefschetz Salomon, Prof. Dr, *Princeton* (N. J., U. S. A.), University.
(C) Leja Franciszek, Prof. Dr, *Kraków*, pl. Jabłonowskich 3.

(V) Leśniewski Stanisław, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Brzozowa 12.
(C) Leśnodorski Gustaw, *Kraków*, ul. Sobieskiego 10.
(C) Levi-Civita Tullio, Prof. Dr, *Roma 25* (Italia), via Sardegna 50.
(L) Lichtenberg Władysław, *Lwów*, Wulecka Droga 78.
(V) Lindenbaum Adolf, Doc. Dr, *Warszawa*, Żolibórz, ul. Krasińskiego 16 m. 34.
(V) Lindenbaumowa Janina, Dr, *Warszawa*, Żolibórz, ul. Krasińskiego 16 m. 34.
(L) Loria Stanisław, Prof. Dr, *Lwów*, ul. Supińskiego 11A.
(V) Lubelski Salomon, Dr, *Warszawa*, ul. Leszno 77.
(L) Łomnicki Antoni, Prof. Dr *Lwów*, ul. Szaszkiewicza 3, III p.
(V) Łomnicki Zbigniew, *Warszawa*, ul. Berezyńska 37.
(V) Łukasiewicz Jan, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Sewerynów 6.
(V) Łuzin Nikołaj, Prof. Dr, *Moskwa*, (U. R. S. S.), Arbat 25 kw. 8.
(L) Maksymowicz Adam, Dr, *Lwów*, ul. Asnyka 11.
(C) Mandelbrojt S., Prof. Dr, *Clermont-Ferrand*, (Puy de Dôme, France), Université.
(W) Marcinkiewicz Józef, Doc. Dr, *Wilno*, ul. Zamkowa 11, Seminarium Matematyczne.
(P) Marconi Andrzej, Prof. Gimn., *Poznań*, ul. Libelta 1.
(C) Mathison Miron, Doc. Dr, *Kraków*, Rynek Kleparski 4.
(W) Matulewicz Konstanty, *Wilno*, ul. Witoldowa 51.
(L) Mazur Stanisław, Doc. Dr, *Lwów*, ul. Obertyńska 36.
(V) Mazurkiewicz Stefan, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Oboźna 11 m. 7.
(V) Menger Karl, Prof. Dr, *Notre Dame* (Ind., U.S.A.), Box 206,
(V) Mieńszow Dimitrij, Prof. Dr, *Moskwa* (U.R.S.S.), Dievitchie Pole, Bojeninowski per. 5 kw. 4.
(L) Montel Paul, Prof. Dr, *Paris 14* (France), rue du Faubourg Saint Jacques 79.
(V) Moore R. L., Prof. Dr, *Austin* (Texas, U.S.A.), University of Texas.
(V) Mostowski Andrzej, Dr, *Warszawa*, ul. Klonowa 5.
(L) Napadiewiczówna Zofia, *Lwów*, ul. Bonifratrów 8.
(V) Spława-Neyman Jerzy, Doc. Dr, *London W. C. 1* (England), University College, Galton Laboratory.

(V) Nikliborc Władysław, Prof. Dr, *Warszawa,* Politechnika, Wydział Chemii.
(V) Nikodym Otton, Doc. Dr, *Warszawa,* ul. Koszykowa 53 m. 35.
(V) Nikodymowa Stanisława, Dr, *Warszawa,* ul. Koszykowa 53 m. 35.
(C) Ohrenstein Szymon, *Drohobycz,* I Pryw. Gimn. Żeńskie.
(P) Orlicz Władysław, Prof. Dr, *Poznań,* ul. Grunwaldzka 14, Instytut Matematyczny.
(V) Otto Edward, Dr, *Warszawa,* ul. Grażyny 18.
(W) Patkowski Józef, Prof. Dr, *Wilno,* ul. Piaskowa 12.
(C) Pearson Egon Sharpe, Dr, *London W. C. 1* (England), University College.
(L) Pepis Józef, Mgr, *Lwów,* ul. św. Teresy 26A.
(V) Picard Sophie, Dr, *Neuchâtel,* (Suisse), Cassardes 14A.
(L) Plamitzerówna Helena, *Lwów,* ul. Gipsowa 32.
(C) Popovici Constantin, Prof. Dr, *Bucuresti* (Roumanie), Université.
(V) Popruženko Jerzy, Dr, *Warszawa,* ul. Rozbrat 32 m. 7.
(V) Posament Tadeusz, Mgr, *Mława,* Gimnazjum.
(V) Prasad Ganesh, Prof. Dr, *Calcutta,* (East India), Samavay Manshions, Corporation str. 2.
(V) Presburger Mieczysław, Mgr, *Warszawa,* Bielany, ul. Barcicka 27.
(V) Przeborski Antoni, Prof. Dr, *Warszawa,* ul. Nowy Zjazd 5.
(V) Rajchman Aleksander, Doc. Dr, *Warszawa,* ul. Zajęcza 7 m. 9.
(C) Rosenblatt Alfred, Prof. Dr, *Lima* (Peru), Universitad Mayor de San Marcos.
(C) Rozental Stefan, Dr, *Kraków,* ul. Zyblikiewicza 15.
(C) Rozmus Antoni, *Piotrków,* Gimnazjum Państwowe.
(W) Rudnicki Juliusz, Prof. Dr, *Wilno,* ul. Zamkowa 11, Seminarium Matematyczne.
(L) Ruziewicz Stanisław, Prof. Dr, *Lwów,* ul. Supińskiego 11.
(V) Saks Stanisław, Doc. Dr, *Warszawa,* Żoliborz, ul. Krasińskiego 16 m. 94..
(L) Schauder Juliusz, Doc. Dr, *Lwów,* ul. Tarnowskiego 29.
(C) Scheybal Adolf, *Kraków,* ul. Pierackiego, Gimnazjum VIII.
(L) Schreier Józef, Dr, *Drohobycz,* ul. Bednarska 8.

(C) Sedlak Stefan, *Bielsko,* Gimnazjum Państwowe.
(P) Seipeltówna Lidia, Dr, *Poznań,* ul. Asnyka 5.
(C) Sergesco Pierre, Prof. Dr, *Cluj* (Roumanie), Seminar matematic Universital.
(V) Sieczka Franciszek, Ks. Dr, *Płock,* ul. Nowa 2.
(V) Sierpiński Wacław, Prof. Dr, *Warszawa,* ul. Marszałkowska 73.
(V) Singh Avarcesh Narayan, Prof. Dr, *Lucknow,* (India), University.
(P) Smolińska Stefania, Prof. Gimn. *Poznań,* ul. Jasna 5 m. 6.
(P) Smosarski Władysław, Prof. Dr, *Poznań,* Golęcin.
(V) Sobociński Bolesław, Dr, *Warszawa,* Praga, ul. Targowa 70 m. 10.
(V) Sokołowski Lech, Dr, *Warszawa,* ul. Filtrowa 83.
(W) Sokół-Sokołowski Konstanty, Mgr, *Wilno,* ul. Zakretowa 23A.
(C) Stamm Edward, Dr, *Wieliczka,* Gimnazjum Prywatne.
(C) Stankiewicz Ksawery, *Kraków,* ul. Długa 50.
(L) Starosolska-Szczepanowska Zofia, *Lwów,* Korpus Kadetów.
(V) Steckel Samuel, Dr, *Białystok,* Gimnazjum.
(L) Steinhaus Hugo, Prof. Dr, *Lwów,* ul. Kadecka 14.
(L) Sternbach Ludwik, *Lwów,* ul. Obertyńska 36.
(L) Stożek Włodzimierz, Prof. Dr, *Lwów,* ul. Nabielaka 55A.
(V) Straszewicz Stefan, Prof. Dr, *Warszawa,* ul. 6 Sierpnia 46 m. 14.
(W) Szczeniowski Szczepan, Prof. Dr, *Wilno,* ul. Wielka 24 m. 19.
(L) Szczepanowski Karol, Mjr, *Lwów,* Korpus Kadetów.
(V) Szmuszkowiczówna Hanna, Mgr, *Warszawa,* ul. Kupiecka 8.
(V) Szpilrajn Edward, Dr, *Warszawa,* al. Ujazdowska 32 m. 9.
(V) Szymański Piotr, Dr, *Warszawa,* ul. Ursynowska 40C.
(P) Ślebodziński Władysław, Doc. Dr, *Poznań,* al. Hetmańska 30.
(V) Tamarkin J. D., Prof. Dr, *Providence* (R. I., U.S.A.), Brown University.
(V) Tarski Alfred, Doc. Dr, *Warszawa,* Żoliborz, ul. Sułkowskiego 4.
(C) Titz Henryk, Dr, *Kraków,* ul. Św. Tomasza 27.
(L) Turowicz Andrzej, Mgr, *Lwów,* ul. Zyblikiewicza 52.
(C) Turski Stanisław, Dr, *Kraków,* ul. Mickiewicza 49.

(L) Ulam Stanisław, Dr, *Cambridge* (Mass., U.S.A.), Harvard University, Adams House.
(C) Urbański Włodzimierz, Dr, *Pionki,* Laboratorium Centralne P. W. P.
(C) Vetulani Kazimierz, Ing. Dr, *Kraków,* ul. Smoleńska 14.
(V) Walfisz Arnold, Prof. Dr, *Tiflis,* (U.R.S.S.), Saba-Solkhana 11.
(V) Waraszkiewicz Zenon, Doc. Dr, *Warszawa* ul. Koszykowa 69 m. 10.
(C) Ważewski Tadeusz, Prof. Dr, *Kraków,* Uniwersytet Jagielloński.
(L) Weigel Kasper, Prof. Dr, *Lwów*, ul. Romanowicza 3.
(L) Weinlösówna Sala, Dr, *Lwów*, ul. Klonowicza 18.
(C) Weyssenhoff Jan, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Smoleńska 25A.
(C) Węgrzynowicz Leopold, *Kraków*, ul. Krowoderska 74.
(C) Whyburn Gordon T., Prof. Dr, *Charlottesville* (Va., U.S.A.), University of Virginia.
(C) Wileński Henryk, Mgr, *Kraków*, ul. Łobzowska 24.
(C) Wilk Antoni, Dr, *Kraków*, ul. Wybickiego 4.
(C) Wilkosz Witold, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Zyblikiewicza 5 m. 7.
(C) Wilkoszowa Irena, Mgr, *Kraków*, ul. Zyblikiewicza 5 m. 7.
(V) Winogradow Ivan, Prof., Dr, *Moskwa 49* (U.R.S.S.), Bolszaja Kałużskaja 67, Matem. Inst. Akad. Nauk.
(P) Witkowski Józef, Prof. Dr, *Poznań*, ul. Palacza 64.
(V) Wolibner Witold, Dr, *Warszawa*, ul. 6 Sierpnia 50, Instytut Aerodynamiczny.
(V) Wundheiler Aleksander, Dr, *Warszawa*, ul. Wiktorska 3 m. 26.
(V) Zahorski Zygmunt, Mgr, *Warszawa*, ul. Sienna 91 m. 2.
(C) Zakrocki Stanisław, *Kraków*, ul. Smoleńska 5 m. 7.
(V) Zalcwasser Zygmunt, Dr, *Warszawa*, ul. Leszno 51.
(V) Zarankiewicz Kazimierz, Doc. Dr, *Warszawa*, ul. 6 Sierpnia 27 m. 73.
(C) Zaremba Stanisław, Prof. Dr, *Kraków*, ul. Żytnia 6.
(C) Zaremba Stanisław Krystyn, Doc. Dr, *Kraków*, ul. Lea 19A m. 10.
(L) Zarycki Miron, Dr, *Lwów*, ul. Dwernickiego 32A.
(C) Zawirski Zygmunt, *Kraków*, ul. Wybickiego 1.

(V) Zermelo E., Prof. Dr, *Freiburg i./Br.* (Deutschland), Karlstr. 60.
(W) Zygmund Antoni, Prof. Dr, *Wilno*, ul. Zakretowa 9 m. 5.
(W) Zygmundowa Irena, *Wilno*, ul. Zakretowa 9 m. 5.
(V) Żorawski Kazimierz, Prof. Dr, *Warszawa*, ul. Nowy Zjazd 5.
(L) Żyliński Eustachy, Prof. Dr, *Lwów*, ul. Supińskiego 11 A.

SÉANCES DES SECTIONS

SECTION DE CRACOVIE

12. I. 1938. Leja F. *Sur les polynômes généralisés de Tchebycheff.*

Démonstration de l'existence et de l'unicité du polynôme

$$T_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$$

qui correspond à un ensemble fermé et borné E de points du plan et à une fonction donnée $\Phi(z)$ et remplit la condition suivante:

$$\max_{z \in E} |\Phi(z) \cdot T_n(z)| \leqslant \max_{z \in E} |\Phi(z) \cdot P_n(z)|,$$

où $P_n(z)$ désigne un polynôme quelconque de la forme $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$.

19. I. 1938 et 26. I. 1938. Mathison M. *Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischem Typus* [Math. Ann. **107** (1932), 400–419]; *Die parametrixmethode in Anwendung auf hyperbolische Gleichungssysteme* (Prace Mat.-Fiz. **41** (1933), 177–184].

23. II. 1938. Leja F. *Sur une nouvelle méthode d'approximation des fonctions continues* [ces Annales **17** (1938), p. 1–7].

Soient $f(x)$ une fonction réelle continue dans l'intervalle fermé $I = \langle a, b \rangle$, $\zeta = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de I et

$$L_n^{(j)}(x, \zeta) = \frac{x-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0} \cdot \dots \cdot \frac{x-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}} \cdot \frac{x-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n} \qquad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Lorsque le système ζ varie dans I, la fonction

$$\sum_{j=0}^{n} |L_n^{(j)}(x, \zeta) \cdot e^{n \cdot \lambda \cdot f(\zeta_j)}|,$$

où λ est un paramètre réel, atteint pour chaque n et chaque x fixe (réel ou complexe) sa borne inférieure positive, qui sera désignée par $F_n(x, \lambda)$.

On montre que:

1º *Pour chaque x réel ou complexe et chaque λ réel fixe, la suite*

$$1/n \log F_n(x,\lambda) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

tend vers une fonction-limite, harmonique dans le plan de x en dehors de l'intervalle I.

2º *Il existe dans l'intervalle I la limite réitérée suivante, égale à $f(x)$:*

$$\lim_{\lambda\to 0} 1/\lambda\cdot[\lim_{n\to\infty} 1/n\cdot\log F_n(x,\lambda)] = f(x).$$

16. III. 1938. Zaremba S. K. *Sur l'indice de Kronecker* [C. R. Acad. Sc. Paris **206** (1938), 476–477; cf. plus loin, p. 110, Section de Lwów, séance du 26. II. 1938].

4. V. 1938. Popovici C. (Bucuresti). *Sur les équations intégro- et différentiello-fonctionnelles* [ces Annales **17** (1938), p. 67–90].

11. V. 1938. Leja F. *Sur une suite de fonctions rationnelles et la fonction de Green* [à paraître dans les Annales Acad. Sc. Techniques à Varsovie (1938)].

Soient: E un ensemble fermé et borné de points du plan, $\zeta=\{\zeta_0,\ldots,\zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de E et $p(z)$ un polynôme ne s'annulant pas dans E. Posons

$$U(\zeta_0,\ldots,\zeta_n) = \Big(\prod_{0<j<k<n} |\zeta_j-\zeta_k|\Big)\cdot|p(\zeta_0)\cdot\ldots\cdot p(\zeta_n)|^{-n}.$$

Soit $\eta=\{\eta_0,\ldots\eta_n\}$ le système (ou l'un des systèmes) ζ satisfaisant aux conditions:

(1) $U(\eta_0,\ldots,\eta_n)=\max\limits_{\zeta\in E} U(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)$,

(2) $r_0\leqslant r_j$ pour $j=1,2,\ldots n$,

où $r_j=|(\eta_j-\eta_0)\cdot\ldots\cdot(\eta_j-\eta_{j-1})\cdot(\eta_j-\eta_{j+1})\cdot\ldots\cdot(\eta_j-\eta_n)|\cdot|p(\eta_j)|^{-n}$.

On démontre que la suite de fonctions rationnelles

$$R_n(z)=\frac{z-\eta_1}{\eta_0-\eta_1}\cdot\ldots\cdot\frac{z-\eta_n}{\eta_0-\eta_n}\cdot\left[\frac{p(\eta_0)}{p(z)}\right]^n$$

jouit des propriétés suivantes:

1º *Il existe en dehors de l'ensemble E la limite*

$$R(z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|R_n(z)|},$$

2º *Lorsque $p(z)=az+b$, la fonction $\log R(z)$ est identique à la fonction de Green du domaine D ayant sa frontière dans l'ensemble E et contenant dans son intérieur le point-zéro du polynôme $p(z)$.*

18. V. 1938. Wilkosz W. *Sur la nature des surfaces de Riemann.*

25. V. et 8. VI. 1938. Skrzypkówna W. *Sur la géometrie intégrale.* Une revue des mémoires de MM. Blaschke, Santalo et des autres auteurs sur la géometrie intégrale.

1. VI. 1938. Lebesgue H. (Paris). *Sur la notion de volume et sur la dissection des polyèdres* [à paraître dans ces Annales **17** (1938)].

15. VI. 1938. Ważewski T. *Sur les intégrales premières des équations différentielles ordinaires* [ces Annales **16** (1937), p. 145—161].

SECTION DE LWÓW

15. I. 1938. Kaczmarz S. *Application des courbes sinusoïdales à la construction des routes* [à paraître dans les „Wiadomości Drogowe", Varsovie (en polonais)].

On applique à la construction des courbures de routes les lemniscates au lieu des clotoïdes, qui répondent exactement aux conditions du problème. L'auteur en donne une meilleure approximation à l'aide des courbes sinusoïdales, ce qui permet d'augmenter le nombre des conditions remplies par la courbure de la route. Le point initial de la courbure peut p. ex. être donné d'avance dans des limites assez vastes.

15. I. 1938. Mazur S. *De la théorie des espaces linéaires topologiques.*

I. Démonstration, en partant d'un th. de Tychonoff, que pour tout espace E de type (B) au sens de Banach: 1° dans l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E, 2° dans celui de toutes les transformations linéaires de E en sous-ensembles de E (ces espaces étant considérés comme certains espaces topologiques), chaque ensemble totalement borné est bicompact.

II. Démonstration d'une condition nécessaire et suffisante pour que, dans l'espace $\bar{E}$ conjugué à E, toute fonctionnelle linéaire soit de la forme $f(x_0)$ où $f \in \bar{E}$ et $x_0 \in E$.

19. II. 1938. Banach S. *Sur la mesure dans les espaces abstraits.*

Dans l'espace des fonctions intégrables dont l'intégrale ne dépasse pas 1 en valeur absolue, il n'existe aucune mesure (non triviale) de Lebesgue, complètement additive et telle que les intégrales sur les segments n'empiétant pas les uns sur les autres soient deux à deux indépendantes (au sens de la terminologie probabiliste). Une interprétation de ce théorème dans le domaine de la mécanique statistique.

19. II 1938. Hetper W. *Sur l'algèbre des ensembles finis.*

Discussion des difficultés liées à la définition de la notion d'ensemble dans le système de la sémantique. La construction de l'algèbre des ensembles exige l'introduction d'une nouvelle espèce de variables et l'adoption de l'axiome sémanto-logique $\supset = \alpha\beta \equiv \alpha\beta$.

Or, dans beaucoup de problèmes jouant un rôle capital dans la construction du système de la sémantique, on est contraint de se servir des ensembles finis d'expressions. L'auteur montre que l'axiome en question est dans ce cas superflu, car tout ensemble fini d'expressions peut être obtenu comme celui des solutions de l'équation $\{I * Zx\}$ où I et Z sont des expressions constantes.

26. II. 1938. Zaremba S. K. *Contribution à la théorie de l'indice de Kronecker* [C. R. Acad. Paris **206** (1938), p. 476–477].

Soit C un champ vectoriel (continu) dans l'espace à $n+1$ dimensions $(n>1)$ défini sur la sphère S^n à n dimensions et n'y admettant pas de points singuliers. T désignant le champ des composantes des vecteurs du champ C tangentes à S^n, les points singuliers par rapport à T sont les points dans lesquels le vecteur du champ C est normal à S^n. On peut donc distinguer parmi les points singuliers du champ T ceux dans lesquels le vecteur du champ C est dirigé vers l'extérieur et ceux où il l'est vers l'intérieur de S^n. Soit q la somme des indices de Kronecker de ces derniers points. On peut alors exprimer l'indice i du champ C sur S^n par la formule $i = 1 - q$.

5. III. 1938. Mazur S. *Un théorème sur les points invariants.*

Soit E un espace linéaire topologique localement convexe dont l'élément-zéro admet une suite d'entourages ayant précisément cet élément pour partie commune. Alors, toute transformation continue d'un ensemble convexe et fermé quelconque $A \subset E$ en sous-ensemble bicompact admet un point invariant.

5. III. 1938. Kac M. *Sur les distributions invariantes.*

I. Introduction de la notion de distribution invariante.

II. Théorème: Si l'on a

$$f_1^2(t) + \ldots + f_n^2(t) = nK^2 \tag{1}$$

pour tout t, et si la distribution de la fonction

$$\frac{\xi_1 f_1(t) + \ldots + \xi_n f_n(t)}{\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}} \tag{2}$$

ne dépend pas de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, la distribution de chacune des fonctions f_i où $i = 1, \ldots, n$ est donnée par la formule de Borel

$$\underset{t}{E}[f_i(t) < \omega]|_R = a \int_{-K\sqrt{n}}^{\omega} \left(1 - \frac{u^2}{1 - nK^2}\right)^{\frac{3(n-1)}{2}} du.$$

Inversement, si la distribution de la fonction (2) ne dépend pas de $\xi_1,\ldots,\xi_n$ et s'exprime par la formule de Borel, et si les fonctions $f_l(t)$ sont presque-périodiques, on a l'égalité (1).

III. Interprétations physiques des résultats acquis.

30. IV. 1938. Gillis P. *Un théorème du Calcul des Variations.*

Soient: D_n un domaine à n dimensions, borné, fermé et convexe, situé dans l'espace euclidien à n dimensions, D_{n-1} la frontière $(n-1)$-dimensionnelle de D_n, F une fonction de n variables aux deuxièmes dérivées partielles continues pour toutes les valeurs réelles des variables et $F_{p_ip_j}z^iz^j$ une forme quadratique définie positive. Il existe alors une et une seule fonction de n variables remplissant dans D_n la condition de Lipschitz et dont l'intégrale

$$I(z)=\int\limits_{D_n} F(p^i)\,dx^1dx^2\ldots dx^n \quad \text{où} \quad p_i=\frac{\partial z}{\partial x^i} \qquad \text{pour } i=1,2,\ldots,n$$

atteint son minimum par rapport à l'ensemble des fonctions z qui remplissent la condition de Lipschitz et prennent sur D_{n-1} les valeurs données d'avance, pourvu que ces dernières soient assujetties aux conditions:

(1) il existe une fonction remplissant la condition de Lipschitz dans D_n et prenant ces valeurs sur D_{n-1},

(2) Γ désignant l'image de la fonction $z(x^i)$ sur D_{n-1} dans l'espace à $n+1$ dimensions (x^i,z), la pente d'un hyperplan quelconque qui contient $n+1$ points distincts de Γ ne dépasse pas une valeur donnée.

14. V. 1938. Mazur S. *Sur la continuité des fonctionnelles dans les espaces topologiques.*

Soient: T un ensemble abstrait, E l'ensemble de toutes les fonctions réelles $x(t)$ définies pour $t\epsilon T$ et dont la valeur absolue ne dépasse pas 1, enfin $P(x)$ une fonctionnelle définie dans E et continue en ce sens que si $x_n(t)\to x_0(t)$ pour tous les $t\epsilon T$, on a $P(x_n)\to P(x_0)$.

Alors, si la puissance de T est inférieure au plus petit nombre cardinal inaccessible, T contient un ensemble T_0 tout au plus dénombrable et tel que les valeurs de $P(x)$ se trouvent déterminées par celles de la fonction $x(t)$ dans T_0, c. à d. que si $x_1(t)=x_2(t)$ pour tous les $t\epsilon T_0$, on a $P(x_1)=P(x_2)$.

Ce théorème renferme comme cas particulier le th. de Banach-Kuratowski-Ulam sur l'existence des mesures complètement additives. L'auteur signale en outre quelques applications aux problèmes concernant les points invariants et quelques généralisations.

14. V. 1938. Kaczmarz S. et Turowicz A. *Sur les intégrales indéfinies irrationnelles* [à paraître dans Studia Math. 8 (1938)].

Soient: $f_1(x)$, $f_2(x)$... une suite des fonctions de variable réelle, finies et intégrables dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$, et $\mathfrak{R}$ l'ensemble de toutes les fonctions

d'une variable réelle de la forme $g(x)=R[f_1(x),f_2(x),...,f_k(x)]$ où R est une fonction rationnelle de k variables (avec k arbitraire). Alors, étant donné un intervalle quelconque $\langle\alpha,\beta\rangle$ où $a<\alpha<\beta<b$ (et même où $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ si $a>-\infty$ ou $b<+\infty$), $\mathcal{R}$ contient une fonction intégrable dans $\langle\alpha,\beta\rangle$ dont l'intégrale indéfinie n'appartient pas à $\mathcal{R}$.

28. V. 1938. Lebesgue H. *Sur le calcul des côtés des polygones réguliers.*

L'auteur donne des formules pour l'évaluation des côtés des polygones réguliers convexes et étoilés, basées sur le théorème: l'égalité $\alpha\pi=\pi(\eta_1/2+\eta_2/2^2+...)$, où les η_i sont des 0 où des 1, entraîne l'égalité

$$\cos\alpha\pi=2^{-1}\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\varepsilon_3\sqrt{2+...}}}$$

où $\varepsilon_1=1-2\eta_1$, $\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1-2\eta_2$, $\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3=1-2\eta_3$, ...; la différence entre la valeur de cette racine infinie et celle de sa n-ième racine partielle ne dépasse pas $\pi/2^n$.

18. VI. 1938. Ulam S. *Sur les transformations ergodiques.*

Résultats des recherches communes de l'auteur et de M. J. Oxtoby. Toute variété topologique homéomorphe à un complexe régulier à $n\geqslant 2$ dimensions admet des transformations biunivoques conservant la mesure et *métriquement transitives*, c. à d. ne transformant en eux-mêmes que tout au plus des ensembles de mesure 0 et 1. Etant donnée une homéomorphie quelconque F conservant la mesure, il existe des transformations T arbitrairement voisines de F et telles que, pour toute transformation G, la transformation GTG^{-1} est métriquement transitive.

25. VI. 1938. Mazur S. *Sur les anneaux linéaires.*

Théorème I. Un anneau linéaire $\mathfrak{A}$ à une infinité de dimensions, sans diviseurs du zéro, contient (à une isomorphie près) l'anneau des polynômes nuls pour $x=0$; si $\mathfrak{A}$ possède une unité, il contient (à une isomorphie près) l'anneau de tous les polynômes; si $\mathfrak{A}$ est un corps (non nécessairement commutatif), il contient (à une isomorphie près) le corps de toutes les fonctions rationnelles.

Théorème II. Si, dans un anneau linéaire $\mathfrak{A}$, une norme est définie, satisfaisant—outre des conditions habituelles—à la condition $\|A\cdot B\|=\|A\|\cdot\|B\|$, l'anneau $\mathfrak{A}$ équivaut (c. à d. peut être représenté en conservant les opérations et la norme) soit au corps des nombres réels, soit à celui des nombres complexes, soit au corps des quaternions réels; si $\mathfrak{A}$ est un corps (non nécessairement commutatif) et la norme satisfait à la condition plus faible $\|A\cdot B\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$, il est isomorphe (c. à d. représentable homéomorphiquement avec conservation des opérations) à un des trois corps mentionnés.

Corollaire. A étant une transformation linéaire d'un espace E de type (B) en une partie de E, ils existent deux nombres réels α et β tels que soit l'équation $A^2(x)+\alpha\cdot A(x)+\beta\cdot x=y$ ne possède de solution pour certains $y\in E$, soit l'équation homogène $A^2(x)+\alpha\cdot A(x)+\beta\cdot x=0$ possède une solution non nulle.

30. VI. 1938. Pepis J. *Sur une famille d'ensembles plans et les solutions de l'équation fonctionnelle $F(x,z)=F(x,y)\cdot F(y,z)$ pour $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z$. Application à la théorie générale des intérêts.*

I. Soient A_α, B_α, C_α, D_α les ensembles plans des points, dont les coordonnées satisfont aux conditions: $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$; $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$; $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$, $x\neq y$; $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$ respectivement. Soit Ω la plus étroite famille d'ensembles plans, contenant tous les ensembles A_α, B_α, C_α, D_α $(\alpha\geqslant 0)$ et les sommes quelconques (finies, infinies ou même indénombrables) de ces ensembles.

Théorème. *Toutes les solutions de l'équation fonctionnelle $F(x,z)=F(x,y)\cdot F(y.z)$ où $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z$ sont données par la formule $F(x,y)=g(y)/g(x)(1-\psi(x,y))$, où $g(x)$ est une fonction arbitraire non nulle pour tous les x et $\psi(x,y)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble arbitraire de la famille Ω.*

II. Appelons: *nombre singulier de I espèce* d'une solution donnée F tout nombre $x\geqslant 0$ tel que $F(x,y)=0$ pour $0\leqslant y<x$; *nombre singulier de II espèce* de la solution F tout nombre $x\geqslant 0$ tel que $F(x,y)=0$ pour $y>x$; *nombre frontière* de F, tout nombre $x\geqslant 0$ tel que $F(x,x)=0$. Désignons respectivement par M, N et R les ensembles des nombres ainsi définis, et par Z celui des points (x,y) tels que $F(x,y)=0$ pour la solution F. On a alors

$$Z=\sum_{\alpha\epsilon(N-M)} A_\alpha+\sum_{\alpha\epsilon(M-N)} B_\alpha+\sum_{\alpha\epsilon(M\cdot N)} C_\alpha+\sum_{\alpha\epsilon(M\cdot N\cdot R)} D_\alpha.$$

L'ensemble M est fermé à gauche et l'ensemble N l'est à droite. Les lacunes de la dérivée de M sont dans l'ensemble N et celles de la dérivée gauche de N dans M. Par conséquent l'ensemble $M+N$ est fermé.

III. L'auteur soumet à une critique la théorie des intérêts et propose une *théorie des entreprises à conjoncture variable.* En admettant la seule hypothèse, à savoir que la valeur au moment t_2 d'un capital k emprunté au moment $t_1\leqslant t_2$ ne dépend pas de la personne qui prête, mais seulement de t_1, t_2 et k (l'hypothèse de non-protection), et désignant cette valeur par $f(t_1,k,t_2)$, on a;

$$f(t_1,k_1+k_2,t_2)=f(t_1,k_1,t_2)+f(t_1,k,t_2), \tag{1}$$

$$f(t_1,k,t_3)=f(t_2,f(t_1,k,t_2),t_3), \tag{2}$$

$$f(t_1,k,t_2)\geqslant 0. \tag{3}$$

En appliquant le théorème connu sur l'équation $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et le théorème sur l'équation $F(x,z)=F(x,y)\cdot F(y,z)$, énoncé dans I, la solution générale est de la forme

$$f(t_1,k,t_2)=k\,g(t_2)/g(t_1)(1-\psi(t_1,t_2)),$$

où $g(t)$ est une fonction positive et $\psi(t_1,t_2)$ la fonction caractéristique d'un ensemble de la famille Ω.

En supposant que $f(t_1,k,t_2)>0$, on a la *théorie des entreprises sans faillites*: on a alors $f(t_1,k,t_2)=k\,g(t_2)/g(t_1)$, où la fonction positive $g(t)$ donne l'ainsi dite *courbe de conjoncture*.

En supposant que $f(t_1,k,t_2)$ dépend seulement de k et de (t_2-t_1), on a *la théorie des entreprises à conjoncture constante.* On a alors:

$$f(k_1+k_2,t)=f(k_1,t)+f(k_2,t), \tag{1'}$$

$$f(k,t_1+t_2)=f(f(k,t_1),t_2), \tag{2'}$$

$$f(k,t)\geqslant 0. \tag{3'}$$

En supposant qu'il n'y a pas de faillite, c. à d. que $f(k,t)>0$, on obtient $g(t)=a^t$, c. à d. $f(t_1,k,t_2)=ka^{t_2-t_1}$.

Soit $D(k,t)=f(k,t)-k$. En supposant que l'intérêt de l'intérêt est presque nul, c. à d. que $D(D(k,t_1),t_2)=0$, on obtient la *formule d'intérêt simple*. Les formules d'intérêt simple et composé sont des formules approximatives, puisque la formule $D(D(k,t_1),t_2)=0$ n'est qu'une approximation.

Dans la formule générale de la théorie des entreprises à conjoncture variable avec des faillites, les courbes $g(t)$ sont des courbes de conjoncture. Au moment de la faillite ces dernières peuvent indiquer les valeurs: 0 et 1, la courbe $g(t)$ indiquant en ce moment toujours la valeur 1. Les nombres singuliers de I et II espèce donnent respectivement les moments de la faillite ordinaire et de la faillite véhémente.

SECTION DE POZNAŃ.

14. II. 1938. Gospodarek S. *Sur certaines démonstrations géometriques de Galilée.*

Exemples des raisonnements géometriques extraits des „*Discorsi*" et leurs simplifications par les méthodes de la géométrie analytique. Remarques historiques concernant la vie de Galilée, son conflit tragique avec la Sainte Inquisition et son oeuvre scientifique en général.

15. III. 1938. Mikusiński J. *Ein Referat über die Arbeit von G. Pólya: „Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen", Acta Math. 68 (1937), 145–254.*

15. V. 1938. Zawirski Z. *Descartes comme philosophe et mathématicien.*

I. Quelques détails biographiques. Système métaphysique de Descartes. Son attitude rationaliste dans l'épistémologie: son plan d'embrasser toute la science humaine dans un système déductif, réalisé pour sa métaphysique (*Méditations*, réponses à Mersenne) et tenté pour les sciences naturelles *(Principia)*.

II. Géometrie de Descartes. Problème de Pappus, par lequel il l'avait commencé et sa méthode de solution.

SECTION DE VARSOVIE.

14. I. 1938. Sierpiński W. *Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mésurables* [Fund. Math. **30** (1938), p. 96–99].

14. I. 1938. Mostowski A. *Bericht aus einem Satz von Gödel über die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms.*

21. I. 1938. Sierpiński W. *Sur une transformation de l'intervalle.*

21. I. 1938. Szpilrajn E. *Concerning convergent sequences of sets.*

The author has proved before that 1° there exists a sequence of sets (contained in the interval $I = \langle 0, 1 \rangle$) equivalent to no sequence of projective sets, and 2° there exists a sequence of projective sets equivalent to no sequence of Borel sets [1]). The following theorem deals with an analogeus problem concerning particularly sequences which are *convergent* in the sense of the General Theory of Sets:

In order that every convergent sequence of sets (contained in I) be equivalent to a sequence of Borel sets (or else: of sets which are simultaneously F_σ- and G_δ-sets) it is necessary and sufficient that the hypothesis of the continuum be true.

Necessity. Let E be any subset of I. The sequence $E, E, \ldots$ is convergent and therefore it is equivalent to a sequence $B, B, \ldots$, where B is a Borel set. Hence $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{B}}$, and consequently either $\overline{\overline{E}} \leqslant \aleph_0$ or $\overline{\overline{E}} = \mathfrak{c}$.

Sufficiency. It can be deduced from certain theorems on the characteristic function of a sequence of sets [2]) and from the following remarks eacy to show:

1. A sequence of sets is convergent if and only if its characteristic function assumes only values of the form $m/3^n$.

2. Let f be a real function which transforms I into a set at most enumerable. If the hypothesis of the continuum is true, then there exists a real function g of the first class, defined on I and such that $f^{-1}(y) = g^{-1}(y)$ for each real number y.

21. I. 1938. Nikliborc W. *Über das Dreikörperproblem III.*

4. II. 1938. Waraszkiewicz Z. *Sur une propriété caractéristique de l'arc simple.*

Soient: K un continu métrique, $\mathfrak{K}$ l'hyperespace des sous-continus de K, K_t le sous-continu de K qui correspond à l'élément t de $\mathfrak{K}$; en particulier soit $K_1 = K$. Un sous-continu K_{t_0} de K est appelé *rétracte topolo-*

---

[1]) Fund. Math. **26** (1936), 316 and 313.

[2]) Fund. Math. **26** (1936), 311 and 307.

gique de K s'il existe dans $\mathfrak{R}$ un continu $\mathfrak{R}_0$ unissant les éléments 1 et t_0 et une fonction $F(x,t)$, continue par rapport à l'ensemble des variables $x \epsilon K$ et $t \epsilon \mathfrak{R}$, telle que:

1° pour tout $t \epsilon \mathfrak{R}$ et $x \epsilon K_t$, $F(x,t)$ est une transformation homéomorphe de K_t en K_{t_0},

2° $F(x,t_0)=x$ pour tout $x \epsilon K_{t_0}$.

L'auteur démontre le théorème suivant:

Parmi les continus plans, l'arc simple est caractérisé par la propriété que chacun de ses sous-continus (ne se réduisant à un point) est son rétracte topologique.

La démonstration repose sur l'analyse des courbes, dites *apparentées avec l'arc simple,* qui se laissent ε-déformer en un arc simple (pour tout $\varepsilon>0$).

11. II. 1938. Sierpiński W. *Sur une propriété des espaces métriques séparables* [Fund. Math. **30** (1938), 129–131].

11. II. 1938. Kuratowski K. *Sur la compactification des espaces à connexité n-dimensionnelle* [Fund. Math. **30** (1938), 242–246].

11. II. 1938. Mazurkiewicz S. *Sur les continus indécomposables.*

25. II. 1938. Szpilrajn E. *On the equivalence of some classes of sets* [Fund. Math. **30** (1938), 235–241].

25. II. 1938. Rothberger F. (Wien). *Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen* [Fund. Math. **30** (1938), 215–217].

18. III. 1938. Sierpiński W. *Sur un problème concernant les familles d'ensembles parfaits* [Fund. Math. **31** (1938), 1–3].

18. III. 1938. Gillis P. (Bruxelles). *Sur les théorèmes d'existence du Calcul des Variations.*

La méthode directe, qu'utilisa A. Haar pour démontrer l'existence d'une solution du problème

$$\int_D\!\!\int F(\mathfrak{z}_x,\mathfrak{z}_y)\,dx\,dy=\text{minimum}\left(\mathfrak{z}_x=\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{z}(x,y),\ \mathfrak{z}_y=\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{z}(x,y)\right),$$

supposé régulier, peut être appliquée à d'autres problèmes plus généraux. On peut notamment, de cette manière, démontrer l'existence d'une solution du problème

$$\int_{D_n} F(\mathfrak{z}_{x^i})\,dx'\dots dx^n=\text{minimum}\left(F(\mathfrak{z}_{x^i})=F\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x'},\dots\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x^n}\right)\right)$$

lorsque la forme quadratique figurant sous le signe de la variation seconde est supposée définie positive.

25. III. 1938. **Mostowski A.** *Über gewisse universelle Relationen.*

Als *Relation* bezeichnen wir jede Menge r von geordneten Paaren $\langle x,y\rangle$. Die Menge $|r|$, welche aus den Hintergliedern und den Vordergliedern aller Paare $\langle x,y\rangle\epsilon r$ besteht, heißt *Feld* von r. Zwei Relationen r und s heißen *isomorph*, in Zeichen $r\sim s$, wenn es eine Funktion f gibt, die $|r|$ auf $|s|$ eineindeutig abbildet, und zwar so, daß die Bedingungen $\langle x,y\rangle\epsilon r$ und $\langle f(x),f(y)\rangle\epsilon s$ für beliebige $x,y\epsilon|r|$ äquivalent sind.

Wir setzen für jede Relation r und beliebige Mengen $m,n\subset|r|$:

$$r_m=\underset{\langle x,y\rangle}{E}[y\epsilon m]\cdot r,\qquad r^n=\underset{\langle x,y\rangle}{E}[x\epsilon n]\cdot r,\qquad r_m^n=(r_m)^n.$$

Eine Relation r nennen wir *universell* für das System $\mathfrak{S}$ von Relationen, wenn $r\epsilon\mathfrak{S}$ und es für jedes $s\epsilon\mathfrak{S}$ eine Menge $m\subset|r|$ gibt, so daß $s\sim r_m^m$. Wir wollen hier auf die Existenz universeller Relationen für gewisse Systeme von Relationen mit abzählbarem Feld hinweisen; und zwar sind es folgende Systeme:

($\mathfrak{K}$) das System der transitiven und areflexiven Relationen r mit $\overline{\overline{|r|}}\leqslant\aleph_0$;

($\mathfrak{L}$) das System der transitiven und reflexiven Relationen r mit $\overline{\overline{|r|}}\leqslant\aleph_0$.

($\mathfrak{L}^*$) das System der Relationen $r\epsilon\mathfrak{L}$, welche der Bedingung genügen:

(*) ist $\langle x,y\rangle\epsilon r$ und $\langle y,x\rangle\epsilon r$, so ist $x=y$;

($\mathfrak{M}$) das System der transitiven Relationen r mit $\overline{\overline{|r|}}\leqslant\aleph_0$;

($\mathfrak{M}^*$) das System der Relationen $r\epsilon\mathfrak{M}$, die der Bedingung (*) genügen.

Um unsere Sätze auszudrücken, führen wir noch folgende Bezeichnungen ein: $\{X\}$, bzw. $[X]$, bezeichnet für jedes Mengensystem X die Menge der Paare $\langle x,y\rangle$, wo $x,y\epsilon X$ und $x\subset y$, bzw. $x\subset y$ und $y\neq x$, ist, K_0 bezeichnet das System, das aus Summen von endlich vielen linksseitig abgeschlossenen und rechtsseitig offenen Intervallen mit rationalen Endpunkten besteht; L_0 bezeichnet das System, das aus Summen von endlich vielen linksseitig abgeschlossenen und rechtsseitig offenen Intervallen besteht, deren Endpunkte von der Form $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ (p,q natürliche Zahlen) sind.

Schließlich wird für jede Relation r mit r' die Menge der Paare $\langle\langle x,p\rangle,\langle y,q\rangle\rangle$ bezeichnet, wo $\langle x,y\rangle\epsilon r$ und p,q natürliche Zahlen sind.

Unsere Sätze lauten nun folgendermaßen:

I. *Ist $r\epsilon\mathfrak{M}$, so gibt es disjunkte Mengensysteme K und L derart, daß $r\sim\{K\}+[K+L]_L^K+[K+L]_K^L+[L]$; dabei ist dann und nur dann $r\epsilon\mathfrak{K}$ bzw. $r\epsilon\mathfrak{L}^*$, wenn $K=0$ bzw. $L=0$ ist.*

Man setzt nämlich $n(x)=\underset{y}{E}[\langle y,x\rangle\epsilon r]$ für $x\epsilon|r|$ und

$$K=\underset{n(x)}{E}[\langle x,x\rangle\epsilon r],\qquad L=\underset{n(x)}{E}[\langle x,x\rangle\,\text{non}\,\epsilon r].$$

II. *Die Relation $[K_0]$ ist universell für $\mathfrak{K}$.*

III. *Die Relation $\{L_0\}$ ist universell für $\mathfrak{L}^*$.*

II und III ergeben sich leicht aus I und aus einem früher von mir bewiesenen Satz [Fund. Math. 29 (1937), 53, Satz 17]. Etwas komplizierteres induktives Verfahren führt zum Satz:

IV. *Die Relation* $[K_0]+\{L_0\}$ *ist universell für* $\mathfrak{M}^*$.

Aus III und IV leitet man noch ganz leicht folgende Sätze ab:

V. *Die Relation* $\{L_0\}'$ *ist universell für* $\mathfrak{L}$.

VI. *Die Relation* $([K_0]+\{L_0\})'$ *ist universell für* $\mathfrak{M}$.

1. IV. 1938. Marcinkiewicz J. *Sur les fonctions caractéristiques analytiques* [voir *Sur les fonctions indépendantes III*, Fund. Math. **31** (1938), 86-102].

1. IV. 1938. Eilenberg S. *Remarque sur les transformations de Fourier.*

Soit $A(L^2)\subset L^2$ une opération linéaire. Pour que l'on ait $A[A(a)]=a$ et $\|A(a)\|=\|a\|$, quel que soit $a\in L^2$, il faut et il suffit qu'il existe deux suites $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ (dont l'une peut être finie) formant ensemble un système orthogonal, normal et complet pour L^2 et telles que l'on ait $A(a_i)=a_i$ et $A(b_i)=-b_i$ pour $i=1,2,\ldots$

1. IV. 1938. Eilenberg S. et Otto E. *Quelques propriétés de la dimension* [Fund. Math. **31** (1938), 149—153].

22. IV. 1938. Sierpiński W. *Compte-rendu du voyage en Italie.*

29. IV. 1938. Eilenberg S. *Sur le prolongement des transformations continues en surfaces sphériques* [Fund. Math. **31** (1938), 179—200].

29. IV 1938. Jaśkowski S. *Über die Entscheidbarkeit der allgemeinen Topologie.*

6. V. 1938. Kuratowski K. *Sur une propriété des décompositions semi-continues.*

Soient: X un sous-ensemble fermé du cube (compact) de Hilbert, f une transformation continue de X en un espace $Y=f(X)$ et α un nombre réel tel que $\delta f^{-1}(y)<\alpha$, quel que soit $y\in Y$. Il existe alors une homéomorphie h telle que $|hf(x)-x|<\alpha$.

Soit $\beta>0$ tel que la condition $\delta(E)<\beta$ entraîne $\delta f^{-1}(E)<\alpha$. Soit $Y=G_0+\ldots+G_m$ une décomposition en ensembles ouverts non vides et tels que $\delta(G_i)<\beta/2$. Soit $x_i\in H_i=f^{-1}(G_i)$. Considérons la fonction $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{G_i\}$ et $\{x_i\}$ [1]), c. à d. la fonction

$$\varkappa(y)=\lambda_0(y)\cdot x_0+\ldots+\lambda_m(y)\cdot x_m \quad \text{où} \quad \lambda_i(y)=\frac{\varrho(y,Y-G_i)}{\varrho(y,Y-G_0)+\ldots+\varrho(y,Y-G_m)}.$$

---

[1]) Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 94.

Il vient $|\varkappa f(x)-x|<\alpha$. En effet, $i_0,\dots,i_k$ désignant le système de tous les indices pour lesquels $x\,\epsilon\, H_{i_j}$, le point $\varkappa f(x)$ appartient au simplexe $x_{i_0}\dots x_{i_k}$ et le diamètre du simplexe $xx_{i_0}\dots x_{i_k}$ est $<\alpha$, car $G_{i_j}\cdot G_{i_l}\neq 0$, donc $\delta(G_{i_j}+G_{i_l})<\beta$, d'où $\delta(H_{i_j}+H_{i_l})<\alpha$.

Chaque transformation continue de Y en le cube de Hilbert (plus précisément: en un cube à $>2\dim Y$ dimensions) pouvant être approchée par une homéomorphie, on peut prendre pour h une homéomorphie telle que $|h(x)-\varkappa(x)|<\alpha-|\varkappa f(x)-x|$ quel que soit x. C. Q. F. D.

On voit ainsi que *l'hyper-espace d'une décomposition semi-continue de X à tranches de diamètre $<\alpha$ peut être obtenu de X par un déplacement $<\alpha$.* C'est une généralisation du th. de M. Eilenberg (C. R. Paris 200 (1935), p. 1003) sur l'équivalence entre les invariants topologiques des transformations à petites tranches et les invariants des petits déplacements.

6\. V. 1938. Szpilrajn E. *On the isomorphism and the equivalence of classes and sequences of sets.*

The author considers some (1-1) correspondences between *classes of sets*, viz: (1) *weak isomorphism*, i. e. the similarity of these classes considered as sets partially ordered by the relation of inclusion; (2) *isomorphism* („isomorphie algébro-logique" in the sense of Kuratowski-Posament[1]); (3) *total isomorphism* (the notion analogous to the preceding, obtained by replacing the finite addition by the addition of an arbitrary finite or transfinite number of sets); (4) *equivalence*[2]). The notions (1)-(4) concern also *sequences* of sets.

The author obtains the following theorem:

Th. 1. If K and L are two weakly isomorphic classes of subsets of two abstract spaces and if each one-element subset of these spaces belongs respectively to K and L, then K and L are equivalent.

As simple consequences of Th. 1 the author derives what follows:

Th. 1.1. Two topological spaces are homeomorphic if and only if the classes of the closed sets in these spaces are weakly isomorphic.

Th. 1.2. There exists a generalized homeomorphism (in the sense of Kuratowski) *between two topological spaces if and only if the classes of Borel sets in these spaces are weakly isomorphic.*

Th. 1.3. The class of the measurable sets (*in the interval $I=\langle 0,1\rangle$*) *and that of the sets possessing the property of Baire in the wide sense* (*in I*) *are not weakly isomorphic*[3]).

Denoting by C Cantor's discontinuum and by $c_e(x)$ the characteristic function of a sequence of sets $e=\{E_n\}$ i. e. $c_e(x)=(0,i_1 i_2\dots)_3$, where $i_n=0$ if $x\,\bar{\epsilon}\,E_n$ and $i_n=2$ if $x\,\epsilon\,E_n$, the author proves:

---

[1]) Fund. Math. 22 (1934), p. 282.

[2]) See e. g. Fund. Math. 30 (1938), p. 237. Cf. also M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), p. 91.

[3]) It is the consequence of Th. 2 and of theorem proved by the author in Fund. Math. 22 (1934), p. 306.

Th. 2. Two sequences: $a=\{A_n\}$ *of subsets of* X *and* $b=\{B_n\}$ *of subsets of* Y *are* (i) *isomorphic*, (ii) *totally isomorphic*, (iii) *equivalent, if and only if* (i') $\overline{c_a(X)}=\overline{c_b(Y)}$, (ii') $c_a(X)=c_b(Y)$, (iii') $\overline{\overline{c_a^{-1}(t)}}=\overline{\overline{c_b^{-1}(t)}}$ *for each* $t\epsilon C$.

With the help of Th. 2 and of some properties of the characteristic function [1]), the author proves what follows:

Th. 2.1. The sequence u of all sets simultaneously closed and open in C is universal in the sense of isomorphism, i. e. *for every sequence e of sets, there exists a sequence of sets belonging to u which is isomorphic to e* (Mostowski-Kuratowski).

Th. 2.2. There exists no sequence of sets universal in the sense of total isomorphism.

Th. 2.3. A sequence e of subsets of X *is totally isomorphic to a sequence of Borel subsets of* I *if and only if the set* $c_e(X)$ *is analytic.*

Th. 2.4. There exists: (i) *a sequence of sets totally isomorphic to a certain sequence of Borel sets but equivalent to no sequence of Borel sets*; (ii) *a sequence of projective sets totally isomorphic to no sequence of Borel sets*; (iii) *a sequence of sets totally isomorphic to no sequence of projective sets.*

13. V. 1938. Charpentier M. (Paris). *Sur les points de Peano de certains systèmes d'équations différentielles* [C. R. Acad. Paris **206** (1938), 1347–1349].

13. V. 1938. Szpilrajn E. *On the space of measurable sets.*

Let μ denote an abstract measure, i. e. an $\aleph_0$-additive, non negative function of a set, defined for the sets belonging to an $\aleph_0$-additive and complementative class M of subsets of an abstract space X; furthermore we suppose $\mu(X)=1$.

Putting $\varrho(M_1, M_2)=\mu[(M_1-M_2)+(M_2-M_1)]$ and identifying such sets M, M' for which $\varrho(M,M')=0$, one obtains a metrical space $\mathfrak{M}(\mu)$ (Fréchet). $\mathfrak{M}(\mu)$ can be considered also as a Boolean algebra (the quotient of M and of the ideal of sets of measure μ zero).

Let μ_1 and μ_2 be two abstract measures. The author shows that the spaces $\mathfrak{M}(\mu_1)$ and $\mathfrak{M}(\mu_2)$ are isometric if and only if the algebras $\mathfrak{M}(\mu_1)$ and $\mathfrak{M}(\mu_2)$ are isomorphic in such a manner that, for the corresponding elements of these algebras, the values of μ_1 and μ_2 are equal.

Definition. Two abstract measures μ_1 and μ_2 are called *isomorphic* whenever the spaces $\mathfrak{M}(\mu_1)$ and $\mathfrak{M}(\mu_2)$ are isometric.

Theorems: I. *An abstract measure* μ *is isomorphic to the measure of Lebesgue* (in the interval $I=\langle 0,1\rangle$) *if and only if*:

1° *the metrical space* $\mathfrak{M}(\mu)$ *is separable,*

2° *for each set M such that* $\mu(M)>0$ *there exists a set* $M'\subset M$ *such that* $0<\mu(M')<\mu(M)$.

[1]) Fund. Math. 26 (1936), pp. 308 and 307.

II. *An abstract measure* μ *is isomorphic to the measure of Lebesgue considered for a class of measurable subsets* (but not necessarily all) *of I if and only if the metrical space* $\mathfrak{M}(\mu)$ *is separable.*

The proofs are simple; they make use of some properties of the characteristic function of a sequence of sets.

Th. I can be deduced also from another characterization of the measure of Lebesgue, due to S. Jaśkowski (unpublished; presented to the Polish Math. Society in 1932 [1])].

20. V. 1938. Szpilrajn E. *On some singular sets* [Cf. *The caracteristic function of a sequence of sets and some of its aplications*, Fund. Math. **31** (1938), § 4].

20. V. 1938. Borsuk K. (présenté par Knaster B.) *Sur un problème de MM. Kuratowski et Ulam* [Fund. Math. **31** (1938)].

27. V. 1938. Kozakiewicz W. *Sur un théorème asymptotique du Calcul des Probabilités.*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une suite de variables aléatoires. Posons pour x et t réels:

$$F_n(x) = P\{x_n \leqslant x\}, \qquad \varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x).$$

$F_n(x)$ est la loi de probabilité de la variable x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\varphi_n(t)$ la fonction caractéristique correspondante. Soit en outre:

$$F_n(x) = F(x)$$

et par conséquent

$$\varphi_n(t) = \varphi(t). \qquad n = 1, 2 \ldots$$

Introduisons les notations suivantes:

$$a_s = \mathcal{E}(x_n^s), \quad b_s = \mathcal{E}(|x_n|^s),$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'espérance mathématique, et posons:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

Supposons que le moment b_k pour l'entier fixe $k \geqslant 3$ existe. Si la fonction caractéristique $\varphi(t)$ satisfait à la condition

$$\text{(C)} \qquad \limsup_{t \to +\infty} |\varphi(t)| < 1,$$

on a d'après le théorème de M. Cramér [2]) $\Phi_n(x) = F_n(x) + R_n(x)$, où $\Phi_n(x)$ est la loi de probabilité de la variable $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}}$, $F_n(x)$ est une forme

---

[1]) Annales Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 122.

[2]) H. Cramér, *Random Variables and Probability Distribution*, Cambridge 1937, p. 81.

linéaire des dérivées de la fonction de Gauss dont les coefficients ne s'expriment que par les moments $a_1=0, \dots, a_{k-1}$ et $\sup_x R_n(x)=O(1/n^{(k-2)/2})$.

Considérons la fonction réelle $V(x)$ satisfaisant aux conditions:

(A₁) $$V(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} V(x)=0, \qquad V(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} V(x)=1$$

$$b'_k=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^k|dV(x)|<+\infty. \qquad a_i=\int_{-\infty}^{+\infty}x^i dV(x), \qquad i=1.2,\dots,k-1.$$

(A₂) La dérivée, $V'(x)$ existe, est continue et l'on a $|V'(x)|\leqslant N$ pour chaque x, N ne dépendant pas de x.

(A₃) $V(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle infini $\langle-\infty,+\infty\rangle$.

Posons par induction:

$$V_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}V(x-\zeta)\,dV(\zeta), \qquad V_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}V_{n-1}(x-\zeta)\,dV(\zeta).$$

Théorème I. Si la fonction caractéristique $\varphi(t)$ satisfait à la condition (C), *on a*

$$\sup_x\ |\Phi_n(x)-V_n(x\sqrt{n})|=O(1/n^{(k-2)/2}).$$

Le th. I est plus général que celui de M. Cramér. Posons p. ex. pour $k=4$ et $0<a_3<4$:

$$V'(x)=\begin{cases} f(x,a_3)=c(x+2/a_3)^{4/a_3^2-1}e^{-2x/a_3} & \text{pour } x\geqslant-2/a_3 \\ f(x,a_3)=0 & \text{pour } x\leqslant-2/a_3 \end{cases}$$

où $f(x,a_3)$ désigne la loi élémentaire de probabilité de Pearson déterminée par les trois premiers moments $a_1=0$, $a_2=1$ et a_3, et c est définie par la relation $\int_{-\infty}^{\infty}f(x,a_3)\,dx=1$. On obtient alors

$$\sup_x\ |\Phi_n(x)-\int_{-\infty}^{x}f(x.a_3/\sqrt{n})\,dx|=O(1/n).$$

Passons maintenant au cas où $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ et $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sont des variables aléatoires telles que x_n dépend seulement de y_n. Posons pour x, y, t', t'' réels:

$$F_n(x,y)=P\{x_n\leqslant x,\ y_n\leqslant y\}, \qquad \varphi_n(t't'')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(xt'+yt'')}dF_n(x,y),$$

$$a_{ij}=\mathcal{E}(x_n^i y_n^j), \qquad b_{ij}=\mathcal{E}(|x_n|^i|y_n|^j).$$

Supposons que $F_n(x,y)=F(x,y)$ pour $n=1,2,\dots$ et, par conséquent, que $\varphi_n(t',t'')=\varphi(t',t'')$. Supposons encore que $a_{10}=a_{01}=0$, $a_{20}=a_{02}=1$ et que a_{k0}, a_{0k} soient finis pour un certain $k\geqslant3$.

Soit $V(x,y)$ une fonction dont les moments a'_{ij} pour $i, j \geqslant 0$, $i+j \leqslant k-1$ sont égaux respectivement à a_{ij}, les moments b'_{k0}, b'_{0k} sont finis et qui satisfait aux conditions:

(B₁) $V(-\infty,y)=V(x,-\infty)=V(-\infty,-\infty)=0, \qquad V(+\infty,+\infty)=1,$

(B₂) $V(x,y)$ possède les dérivées $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial^2 v/\partial x \partial y$ continues et bornées dans tout le plan,

(B₃) $V(x,y)$ est à variation bornée dans tout le plan.

Posons par induction:

$$V_2(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V(x-\zeta,y-\eta)\,dV(\zeta,\eta), \quad V_n(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(x-\zeta,y-\eta)\,dV(\zeta,\eta).$$

Théorème II. Si $\Phi_n(x,y)$ *est la loi de probabilité des variables* $(x_1+\ldots+x_n)/\sqrt{n}$ et $(y_1+\ldots+y_n)/\sqrt{n}$, *et si* $\varphi(t',t'')$ *satisfait à la condition*

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \begin{aligned} &\varphi(t',t'')=O(|t'\cdot t''|) \quad \textit{pour} \quad |t'|,|t''| \to +\infty, \\ &|\varphi(t',t'')|<1 \quad \textit{pour} \quad |t'|+|t''| \neq 0, \end{aligned}$$

on a

$$\sup_{x,y} |\Phi_n(x,y)-V_n(x\sqrt{n}, y\sqrt{n})| = O(1/n^{(k-2)/2-\alpha}) \qquad \textit{pour tout} \quad \alpha>0.$$

3. VI. 1938. Lebesgue H. (Paris). *Quelques remarques sur la structure des polyèdres de genre zéro.*

3. VI. 1938. Neumann J. (Princeton). *Continuous geometry* [Proc. Nat. Acad. 22 (1936), 92–100].

10. VI. 1938. Ulam S. (Cambridge, Mass.). *The existence of metrically transitive transformations* [Cf. J. C. Oxtoby and S. M. Ulam, *The existence of metrically transitive transformations*, Preliminary report. Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 347].

10. VI. 1938. Szpilrajn E. *Operations upon sequences of sets.*

The author deals with some kinds of operations upon sequences of sets, viz. the class of *analytical operations* (in the sense of Kantorovitch-Livenson)[1]) and two wider classes of operations defined as follows:

Definitions. An operation $F(E_1,E_2,\ldots)$ is called operation in the sense of the General Theory of Sets, or briefly *G-operation* (*G*-operation*), if the equivalence[2]) (the total isomorphism[3])) of the sequences: $A, A_1, A_2, \ldots$ and $B, B_1, B_2, \ldots$ and the equality $A=F(A_1,A_2,\ldots)$ imply the equality $B=F(B_1,B_2,\ldots)$.

---

[1]) Fund. Math. 18 (1932), p. 224.

[2]) Two sequences of sets $\{E_n\}$ and $\{E_n\}$ are called *equivalent* (or *represent the same type of equivalence*) if there exists a (1:1)-transformation $\varphi(p)$ such that $\varphi(E_n)=E_n$ for $n=1,2,\ldots$

[3]) Cf. this volume, p. 119.

Theorems. I. *Each analytical operation is a G^*-operation. Each G^*-operation is a G-operation.*

II. *A G-operation $F(E_1,E_2,...)$ is analytical if and only if for each set X the equality $E=F(E_1,E_2,...)$ implies the equality $EX=F(E_1X, E_2X,...)$.*

III. *The class of all analytical operations is the smallest class K of operations such that:* 1⁰ *each operation $\Phi_n(E_1,E_2,...)=E_n$* $(n=1,2,...)$ *belongs to K,* 2⁰ *and* 3⁰ *for each transfinite sequence $F_\xi(E_1,E_2,...)$ of operations belonging to K the operations $\sum_\xi F_\xi(E_1,E_2,...)$ and $F_1(E_1,E_2,...)-F_2(E_1,E_2,...)$ also belong to K*[1]).

IV. *Let T be a subset of Cantor's discontinuum (without the point* 0) *and let $c_e(x)$ denote the characteristic function of a sequence $e=\{E_n\}$. The function*

$$F(E_1,E_2,...)=c_e^{-1}(T)$$

is (i) *an analytical operation,* (ii) *a G^*-operation,* (iii) *a G-operation, whenever the set T* (i′) *is fixed,* (ii′) *depends only on the set $c_e(E_1+E_2+...)$,* (iii′) *depends only on the type of equivalence*[2]) *of the sequence e.*

Conversely, each operation belonging to the classes (i), (ii) or (iii) *can be represented in this way.*

Examples. 1. $G(E_1,E_2,...)=$ the first of the sets E_n which is of the smallest power. It is a G-operation but not a G^*-operation.

2. $H(E_1,E_2,...)=E_1\cdot E_2\cdot...$ or $E_1+E_2+...$, if $E_1E_2\neq 0$ or $E_1E_2=0$ respectively. It is a G^*-operation but not an analytical operation.

17. VI. 1938. Lindenbaum A. *Sur les bases des familles de fonctions.*

D étant un ensemble quelconque, soit $\mathfrak{R}$ une famille quelconque de fonctions $f(...,x_i,...)$ dont chacune des variables x_i parcourt l'ensemble (le *champ*) D et dont les valeurs appartiennent à D. Soient: $\mathfrak{R}^{[k]}$ la famille des fonctions de k variables $f(x_1,...,x_k)$ appartenant à $\mathfrak{R}$; ensuite, $\mathfrak{R}^{[\omega]}=\mathfrak{R}^{[0]}+\mathfrak{R}^{[1]}+...+\mathfrak{R}^{[k]}+...$[3]); $\mathfrak{R}^{I}$ la famille des fonctions de $\mathfrak{R}^{[1]}$ qui transforment D en lui même d'une façon biunivoque (permutations de D); $\mathfrak{R}^{\infty}$ la famille de toutes les fonctions que l'on peut obtenir par superposition (finie) des fonctions de $\mathfrak{R}$. Soit enfin $\mathfrak{F}$ la famille de toutes les fonotions (dans le champ D).

Après avoir signalé quelques théorèmes élémentaires, l'auteur introduit la notion de *base* d'une famille de fonctions. En se bornant au cas le plus important, on dira notamment que $\mathfrak{X}$ est une *base exacte* pour $\mathfrak{R}$, lorsque $\mathfrak{X}^{\infty}=\mathfrak{R}$, et une *base topologique*, lorsque $\mathfrak{X}^{\infty}$ est dense dans la famille $\mathfrak{R}$ constituant un espace fonctionnel topologique. Il peut être question de trouver une base aussi petite que possible, d'où les notions de base *mini-*

---

[1]) This th. is analogous to a th. of Sierpiński on Hausdorff operations, Comptes Rendus Soc. Sci. Varsovie 21 (1928), p. 463.

[2]) Cf. this volume, p. 119.

[3]) $\mathfrak{R}^{[\omega]}$ peut ne pas être identique à $\mathfrak{R}$, si p. ex. $\mathfrak{R}$ contient des fonctions d'une suite infinie $f(x_1,x_2,...)$.

male (de puissance la plus petite possible), *irréductible* (ne contenant aucune autre base) et *absolue* (contenue dans toutes les bases). Une base minimale existe toujours. Sa *puissance* dans le cas d'un champ fini ou dénombrable pour la famille $\mathcal{F}$ des fonctions arbitraires et — à titre d'un exemple différent — pour la famille $\mathcal{L}$ des fonctions définissables du calcul multivalent des propositions de M. Łukasiewicz[1]) est à lire de la table suivante:

Table des puissances des bases minimales

Puissance du champ / Famille de fonctions	2	$n>2$ fini[2])	$\aleph_0$
$\mathcal{F}^I$	1	2	2[3])
$\mathcal{F}^{[1]}$	2	3	2[3])
$\mathcal{F}^{[\omega]}$	1[4])[5])	1[4])[6])	1[3])[4])
$\mathcal{L}^I$	1	1	1[7])
$\mathcal{L}^{[1]}$	2	La puissance croît vers ∞ avec n	$\aleph_0$[7])
$\mathcal{L}^{[\omega]}$	1[4])[5])	1[4])[8])	2?[7])

Quant aux bases exactes (pas nécessairement minimales) dans les champs infinis, l'auteur signale que:

(1) *Il existe une relation binaire* Uxy *dans le champ dénombrable, universelle au sens de M. Mostowski*[9]), c. à d.: toute relation binaire dans le champ dénombrable est isomorphe à la relation U restreinte à un champ convenable;

---

[1]) voir J. Łukasiewicz et A. Tarski: C. R. Soc. Sc. Varsovie 23 (1930) p. 39, où ce calcul, basé sur les notions C et N, est défini par leurs matrices.

[2]) Le contenu d'une base dépend de n, mais on voit que la puissance en est constante, sauf le cas de $\mathcal{L}^{[1]}$.

[3]) Ici, il s'agit d'une base topologique (la topologie étant celle de l'espace 0-dimensionnel de Baire); pour la base exacte, on aurait la puissance $2^{\aleph_0}$. Cf. ces Annales 13 (1934), p. 131: il est à remarquer que la puissance d'une base minimale pour les permutations pourrait être double de celle d'un ensemble des générateurs du groupe.

[4]) Il suffit une fonction de $\mathcal{F}^{[2]}$.

[5]) L'élément unique de cette base est p. ex. la fonction de M. Sheffer, connue en logique.

[6]) Un élément unique d'une telle base a été trouvé par M. Webb.

[7]) Base exacte.

[8]) Un élément unique d'une telle base a été trouvé par M. McKinsey.

[9]) Ce Compte Rendu, séance du 25. III. 1938, p. 117.

(2) La réponse à un problème posé par M. Sierpiński[1]) est négative.

(3) Il existe une fonction continue de deux variables réelles qui ne se laisse obtenir par aucune superposition (finie) de fonctions continues d'une seule variable réelle et de la fonction de deux variables $s(x,y)=x+y$ [2]).

24. VI. 1938. Leray J. (Nancy). *Discussion du problème de Dirichlet* [à paraître dans le Journal des Mathématiques].

24. VI. 1938. Kuratowski K. *Sur le groupe des transformations en circonférence* [à paraître dans les Fund. Math. **31** (1938)].

SECTION DE WILNO

21. II. 1938. Marcinkiewicz J. *Sur les fonctions indépendantes* [Fund. Math. **30** (1938), 202−214 et 347−364].

23. V. 1938. Kempisty S. *Sur les fonctions à variation bornée au sens de Tonelli* [à paraître dans les Travaux Soc. Sc. et Lettres de Wilno **13**].

En posant pour le rectangle $R=(a;a+h;b;b+k)$:

$$H_1(f,R)=k\cdot\min_{b<y<b+k}|f(a+h,y)-f(a,y)|,$$
$$H_2(f,R)=h\cdot\min_{a<x<a+h}|f(x,b+k)-f(x,b)|,$$
$$H\,(f,R)=[|R|^2+H_1^2+H_2^2]^{1/2},$$

l'aire de la surface $z=f(x,y)$ au sens de Lebesgue est égale à l'intégrale supérieure au sens de Burkill de la fonction $H(f,R)$. Il en résulte les propriétés caractéristiques des fonctions à variation bornée au sens de Tonelli et des fonctions absolument continues au même sens.

CHRONIQUE ET PUBLICATIONS

MATHÉMATICIENS ÉTRANGERS EN POLOGNE ET POLONAIS A L'ÉTRANGER

Dr Rothberger Fritz (Wien). Communication à la Section de Varsovie, séance du 25. II. 1938, p. 116.

Dr Gillis Paul (Bruxelles). Communications à la Section de Varsovie, séance du 18. III. 1938, p. 116 et Section de Lwów, séance du 30. IV. 1938, p. 111.

---

[1]) Fund. Math. **27** (1936), p. 8.

[2]) Cf. les recherches de MM. Hilbert, Ostrowski, Bieberbach.

Dr Charpentier Marie (Paris). Communication à la Section de Varsovie, séance du 13. V. 1938, p. 120.

Prof. Dr Popovici C. (Bucuresti). Communication à la Section de Cracovie, séance du 4. V. 1938, p. 108. Conférence à l'Université de Cracovie sur les équations de Mécanique rationelle.

Prof. Dr Lebesgue Henri (Paris). Communications: à la Section de Lwów, séance du 28. V. 1938, p. 112, à la section de Cracovie, séance du 1. VI. 1938, p. 109 et à la section de Varsovie, séance du 3. VI. 1938, p. 123. Conférence à l'Université de Lwów, le 25. V. 1938, intitulée *Sur les constructions à l'aide de la règle et du compas*.

Prof. Dr v. Neumann J. (Princeton). Communication à la Section de Varsovie, séance du 3. VI. 1938, p. 123.

Prof. Leray Jean (Nancy). Communication à la section de Varsovie, séance du 24. VI. 1938, p. 126.

Georgieff G. (Sofia), poursuivit ses études à l'Université de Varsovie en 1937/38 à titre du boursier du Gouvernement Polonais.

Prof. Dr Biernacki M. (Poznań). Deux conférences à l'Université de Cluj (Roumanie) au cours de la *Semaine Mathématique* (de 23. V à 28. V. 1938) convoquée par cette Université, intitulées: *Sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques*.

Prof. Dr Sierpiński W. (Varsovie). Cycle de 3 conférences à l'Université de Rome, en février 1938, intitulées: *Sur les ensembles projectifs*. Conférence sous le même titre à l'Université de Szeged (Hongrie), en mai 1938. Conférence à la Soc. de Math. et Phys. de Budapest, en juin 1938, intitulée: *Sur les ensembles analytiques et projectifs*.

Il est en outre à signaler le séjour à l'étranger, dans les buts scientifiques, de MM.: Dr. Aronszajn N. à Paris, Dr Eilenberg S. à Cambridge et Oxford, Doc. Dr Hurewicz W. à Princeton, Dr Kołodziejczyk S. à Rome, Doc. Dr Spława-Neyman J. à Londres, Prof. Dr Rosenblatt A. à Lima, Dr Ulam S. à Cambridge (Mass.), Doc. Dr Walfisz A. à Tiflis.

PRIX SCIENTIFIQUES, THÈSES ET DOCTORATS

Prof. Dr Bartel C. (Lwów) a obtenu le *Prix Scientifique de la Ville de Lwów* 1938 pour l'ensemble de ses travaux scientifiques.

Doc. Dr Schauder J. (Lwów) a obtenu le *Prix Malaxa* 1938 pour son Mémoire sur les équations differentielles partielles du type elliptique et hyperbolique.

Mgr Butlewski Z., Université de Poznań. Thèse: *Sur les intégrales réelles des équations différentielles linéaires ordinaires* [parue dans Prace Matematyczno-Fizyczne **44** (1938), 17–81 (en polonais)].

Mgr Eidelheit M., Université de Lwów. Thèse: *Sur les solutions des systèmes d'équations linéaires à infinité d'inconnues* [à paraître dans Wiadomości Matematyczne, Warszawa (en polonais); extrait partiel paru aux C. R. Acad. Paris **205** (1937), 206-208].

Mgr Mostowski A., Université de Varsovie. Thèse: *O niezależności definicji skończoności w systemie logiki (Sur l'indépendence de la définition de finitude dans un système de logique)* [parue comme Supplément à ces Annales **16** (1938), en polonais].

Mgr Pepis J., Université de Lwów. Thèse: *Über das Entscheidungsproblem im Bereich des engeren Funktionenkalküls* [parue dans l'Archive Soc. Sc. Lwów 1937 (en polonais)].

En outre, M. Lebesgue Henri, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne et au Collège de France, a été nommé Docteur *honoris causa* de l'Université de Lwów. L'acte solennel a eu lieu à l'Université de Lwów le 28. V. 1938.

LIVRES ET PÉRIODIQUES PARUS

Bulletin du Séminaire Mathématique de l'Université de Wilno **1** Wilno 1938, Séminaire Mathématique de l'Université Stefan Batory, Zamkowa 11 (comme fascicule de Travaux de la Soc. Sc. et Lettres de Wilno **12**, p. 27). Contient 5 travaux de 5 auteurs.

Fundamenta Mathematicae **30** (Warszawa 1938, Seminarium Matematyczne, Oczki 3, p. IV+369). Contient 33 travaux des 16 auteurs.

Studia Mathematica 7 (Lwów 1938, św. Mikołaja 4, p. 161). Contient 17 travaux des 16 auteurs.

Wiadomości Matematyczne 44 (Warszawa 1938, p. VI+164). Contient 9 travaux de 8 auteurs.

Opuscula Mathematica (Kraków 1937, Institut de Mathématiques de l'Ecole des Mines à Cracovie). Contient 3 travaux de 3 auteurs.

Prof. Banach S., *Mechanika w Zakresie Szkół Akademickich* 2 volumes (Warszawa-Lwów 1938, Monografie Matematyczne VIII et IX, p. VI+556).

Prof. Steinhaus H., *Kalejdoskop Matematyczny* (Lwów 1938, Książnica-Atlas), paru aussi en anglais sous le titre *Mathematical Snapshots*, Stechert, New York 1938.

PROBLÈMES

1) Soit E un ensemble fermé et borné des points du plan, $\zeta=\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de E, $a_{jk}=\dfrac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}$ pour $j\neq k=0,1,\ldots,n$ et $a_{jj}=1$. Lorsque les points ζ varient arbitrairement dans E les 4 fonctions de z et ζ

$$A(z,\zeta)=\prod_{j,k=0}^{n}|a_{jk}|, \qquad B(z,\zeta)=\max_{(j)}\prod_{k=0}^{n}|a_{jk}\cdot a_{kj}|,$$

$$C(z,\zeta)=\max_{(j)}\prod_{k=0}^{n}|a_{jk}|, \qquad D(z,\zeta)=\max_{(j)}\prod_{k=0}^{n}|a_{kj}|$$

atteignent leurs bornes inférieures qui seront désignées respectivement par $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$, $D_n(z)$.

On sait (Bullet. Acad. Polon. 1933, p. 281–289; ces Annales t. 12, 1934, p. 57–71 et t. 13, 1935, p. 53–58) que 1^0 les suites $\{\sqrt[n(n+1)]{A_n(z)}\}$, $\{\sqrt[2n]{B_n(z)}\}$, $\{\sqrt[n]{C_n(z)}\}$, $\{\sqrt[n]{D_n(z)}\}$ tendent dans le plan entier vers certaines fonctions limites $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$, 2^0 $\log C(z)$ est égal à la fonction de Green du domaine infini extérieur à E ayant son pôle à l'infini, et que 3^0 on a identiquement $A(z)=B(z)$. Peut-on affirmer qu'on a aussi $A(z)=C(z)=D(z)$?

Problème de M. F. Leja.

2) Soit Δ le déterminant du degré n dont le terme général est de la forme $\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}$, où $\delta_{ij}=0$ lorsque $i\neq j$, $\delta_{ii}=1$ et les ε_{ij} sont quelconques. Quelle est la valeur minima M de Δ lorsque les ε_{ij} varient tout en satisfaisant aux inégalités $|\varepsilon_{ij}|\leqslant a<\dfrac{1}{n}$ (a est fixe)? (On peut démontrer que $0<M\leqslant 1-na$. Suivant une observation de M. Biernacki le minimum M ne peut être atteint que dans le cas $|\varepsilon_{ij}|=a$).

Problème de M. T. Ważewski.

REMARQUE SUR LES INTÉGRALES PREMIÈRES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par S. K. Zaremba, Kraków

§ 1. M. T. Ważewski [1]) a posé la question de savoir quel est le plus grand nombre d'intégrales premières indépendantes que peut admettre dans un domaine unicohérent un système de n équations différentielles ordinaires du premier ordre, n'ayant pas de singularités dans ce domaine et admettant une caractéristique fermée située dans le même domaine. Pour $n=1$ il n'y a pas de tels systèmes d'équations, mais il peut ne pas être inutile de faire voir au moyen d'un exemple que pour $n>1$, ce nombre n'est pas inférieur à $n-1$, et tel est précisément l'objet de la présente Note. Nous allons en effet construire un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre, définies sans singularités dans une région fermée unicohérente, satisfaites par une caractéristique fermée située à l'intérieur de cette région, et admettant dans la totalité de cette région une intégrale première douée de dérivées partielles ne disparaissant simultanément en aucun point.

§ 2. Nous allons d'abord décrire un procédé qui dans la suite nous servira deux fois à former dans certaines régions de l'espace des systèmes de deux équations différentielles en même temps que certaines intégrales premières de ceux-ci, le tout satisfaisant à certaines conditions particulières. Plus précisément, supposons que dans un voisinage, soit V, de la portion de surface définie par les relations

(1) $$x^2+y^2+z^2=9,$$
(2) $$1\leqslant z\leqslant 2,$$

[1]) *Sur les intégrales premières des équations différentielles ordinaires*, dans le tome précédent de ces Annales, p. 145-161, Problème 2, p. 157.

quatre fonctions de la classe C^∞ [1]), $\varphi(x,y,z)$, $\xi(x,y,z)$, $\eta(x,y,z)$ et $\zeta(x,y,z)$ soient données de telle facon que dans ce voisinage la fonction $\varphi(x,y,z)$ soit constante sur la surface (1) et que l'identité

$$\xi(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\zeta(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \tag{3}$$

y soit partout satisfaite sans que ni le gradient de la fonction $\varphi(x,y,z)$, ni le vecteur $(\xi(x,y,z), \eta(x,y,z), \zeta(x,y,z))$ ne disparaissent jamais dans V; supposons de plus que l'expression

$$\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}$$

puisse être considérée dans V comme une fonction univalente et continue du point (x,y,z). Il s'agit maintenant de former quatre fonctions $Q(x,y,z)$, $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ et $N(x,y,z)$ de la classe C^∞ dans la région, soit R, définie par les inégalités (2) et

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 9 \tag{4}$$

de façon que sur la portion de surface définie par les relations (1) et (2) les fonctions $Q(x,y,z)$, $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ et $N(x,y,z)$ ainsi que leurs dérivées partielles de tous les ordres soient égales respectivement aux fonctions $\varphi(x,y,z)$, $\xi(x,y,z)$, $\eta(x,y,z)$ et $\zeta(x,y,z)$ et à leurs dérivées partielles correspondantes, et que dans toute la région R l'identité

$$L(x,y,z)\frac{\partial Q}{\partial x}+M(x,y,z)\frac{\partial Q}{\partial y}+N(x,y,z)\frac{\partial Q}{\partial z}=0 \tag{5}$$

soit satisfaite, sans qu'en aucun point de cette région ni le gradient de la fonction $Q(x,y,z)$, ni le vecteur $(L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z))$ ne puissent s'annuler.

Sans nuire à la généralité de nos considérations, il est permis de supposer que dans V on a identiquement

$$[\xi(x,y,z)]^2+[\eta(x,y,z)]^2+[\zeta(x,y,z)]^2=1.$$

Dans ce cas, on peut encore demander qu'on ait

$$[L(x,y,z)]^2+[M(x,y,z)]^2+[N(x,y,z)]^2=1 \tag{6}$$

[1]) C'est-à-dire admettant des dérivées partielles continues de tous les ordres.

identiquement dans R, ce qui réduit notre tâche à définir la direction et le sens du vecteur $(L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z))$ en tout point de R. Si, de plus, nous formons la fonction $Q(x,y,z)$ de façon à avoir identiquement

$$\partial Q/\partial z \neq 0, \tag{7}$$

il nous suffira, grâce à (5), de déterminer la quantité

$$\operatorname{arctg} \frac{M}{L}$$

en fonction du point de R; c'est précisément ce que nous allons faire.

En effet, on peut toujours supposer le voisinage V assez restreint pour qu'il ne coupe pas le plan $z=0$ et que la relation

$$\partial\varphi/\partial z \neq 0$$

y soit partout vérifiée; on peut même se borner au cas où l'on a partout dans V

$$\partial\varphi/\partial z > 0.$$

On peut alors choisir les constantes a $(a>0)$ et b de façon que dans V on ait

$$\begin{cases} a\sqrt{x^2+y^2+z^2}+b=\varphi(x,y,z) & \text{quand} \quad x^2+y^2+z^2=9, \\ a\sqrt{x^2+y^2+z^2}+b\leqslant\varphi(x,y,z) & \text{quand} \quad x^2+y^2+z^2<9. \end{cases}$$

Soit alors

$$f(x,y,z)\equiv a\sqrt{x^2+y^2+z^2}+b$$

et soit $t(x,y,z)$ une fonction de la classe C^∞ égale à l'unité et ayant toutes ses dérivées partielles de tous les ordres nulles sur la portion de surface définie par (1) et (2), mais nulle identiquement en dehors de V et telle que

$$\partial t/\partial z \geqslant 0 \quad \text{dès que} \quad x^2+y^2+z^2<9\ ^{1)}.$$

Ceci étant, posons

$$Q(x,y,z)=t(x,y,z)\,\varphi(x,y,z)+\{1-t(x,y,z)\}\cdot f(x,y,z)$$

---

[1]) Pour la façon de former de telles fonctions, voir par exemple A. Bielecki, *Sur une généralisation d'un théorème de Weierstrass*, tome X de ces Annales, p. 33-41.

dans la partie commune à V et R et

$$Q(x,y,z)=f(x,y,z)$$

dans tout le reste de R; un calcul immédiat montre que la relation (7) est vérifiée identiquement dans R.

En posant

$$\operatorname{arctg}\frac{M(x,y,z)}{L(x,y,z)}=t(x,y,z)\cdot\operatorname{arctg}\frac{\eta(x,y,z)}{\xi(x,y,z)}$$

dans la partie commune à V et R et

$$\operatorname{arctg}\frac{M(x,y,z)}{L(x,y,z)}=0$$

dans le reste de R, et en demandant que les relations (5) et (6) soient vérifiées identiquement dans R, nous déterminons au signe près les fonctions $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ et $N(x,y,z)$ dans toute cette région; en exigeant cependant que (1) et (2) entraînent

$$L(x,y,z)=\xi(x,y,z),\ M(x,y,z)=\eta(x,y,z),$$

on supprime cette ambiguité et il est clair que les fonctions $Q(x,y,z)$, $L(x,y,z)$, $M(x,y,z)$ et $N(x,y,z)$ que nous venons de construire répondent à la question.

§ 3. En posant

$$\left|\begin{array}{l} x=(3+r\cos\theta)\cos\varphi,\\ y=(3+r\cos\theta)\sin\varphi,\\ z=r\sin\theta, \end{array}\right. \tag{8}$$

nous introduisons un système de coordonnées curvilignes (r,φ,θ) valable dans l'intérieur du tore correspondant à $r=3$ dans les formules précédentes. Le système d'équations différentielles qui, au moyen de ces coordonnées, s'ecrit

$$\cos\left(\theta+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\theta-\sin\left(\theta+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=0,\qquad dr=0, \tag{9}$$

peut être, en coordonnées cartésiennes, mis sous la forme

$$\frac{dx}{A(x,y,z)}=\frac{dy}{B(x,y,z)}=\frac{dz}{C(x,y,z)}, \tag{10}$$

où les fonctions $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ et $C(x,y,z)$ sont déterminées à un facteur arbitraire près. Nous supposerons

dans la suite ce facteur choisi de façon que le vecteur $(A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$ ait le même sens que le vecteur ayant pour coordonnées curvilignes respectivement

$$0, \quad \sin\left(\theta+\varphi-\frac{\pi}{4}\right), \quad \cos\left(\theta+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$$

et que sa longueur soit égale à l'unité. Les fonctions $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ et $C(x,y,z)$, qu'il est inutile de calculer explicitement, sont manifestement analytiques.

Considérons le système d'équations (10) dans la région, soit R_1, définie en coordonnées curvilignes par les inégalités:

$$(\mathrm{R}_1) \qquad \left|\begin{array}{c} 1\leqslant r\leqslant 2 \\ \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi \quad \text{dès que} \quad \frac{3}{4}\pi<\varphi<\frac{5}{4}\pi. \end{array}\right.$$

Le système d'équations envisagé ne présente aucune singularité dans ce domaine et il admet r comme intégrale première; on le constate immédiatement en examinant les formules (9). On trouve aussi une infinité de caractéristiques fermées contenues dans R_1; en coordonnées curvilignes, leurs équations s'écrivent

$$\theta+\varphi=0, \quad r=C^{\text{te}},$$

cette constante, d'ailleurs arbitraire, devant être contenue dans l'intervalle (1, 2).

Cependant, la région R_1 n'est pas unicohérente. Pour obtenir une telle région, nous allons ajouter à R_1 deux autres régions: une région R_2 déterminée par les inégalités

$$(\mathrm{R}_2) \qquad -1\leqslant z\leqslant 1, \quad \sqrt{x^2+y^2}\leqslant 3-\sqrt{4-z^2}$$

(c'est la composante bornée de l'ensemble que l'on obtient en supprimant de la couche $|z|\leqslant 1$ la partie intérieure au tore $r=2$), et une seconde région, soit R_3, déterminée, en coordonnées curvilignes, par les inégalités

$$(\mathrm{R}_3) \qquad 0\leqslant r\leqslant 1, \quad -\tfrac{3}{4}\pi\leqslant\varphi\leqslant\tfrac{3}{4}\pi;$$

la somme $R_0=R_1+R_2+R_3$ est manifestement unicohérente. Nous allons maintenant définir dans toute la région R_0 des fonctions $F(x,y,z)$, $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ fournissant l'exemple annoncé dans le § 1.

Dans R_1, nous faisons tout simplement:

$$F(x,y,z)=r,$$
$$X(x,y,z)=A(x,y,z), \quad Y(x,y,z)=B(x,y,z), \quad Z(x,y,z)=C(x,y,z).$$

Pour définir les quatre fonctions en question dans R_2, on n'a qu'à transformer cette région et son voisinage par les formules

$$\bar{x}=x\frac{\sqrt{9-\left(\frac{z+3}{2}\right)^2}}{3-\sqrt{4-z^2}}, \quad \bar{y}=y\frac{\sqrt{9-\left(\frac{z+3}{2}\right)^2}}{3-\sqrt{4-z^2}}, \quad \bar{z}=\frac{z+3}{2};$$

la région R_2 se trouve ainsi transformée en R et il est facile de voir que le procédé décrit dans le § 2 peut être maintenant appliqué en remplaçant $\varphi(x,y,z)$, $\xi(x,y,z)$, $\eta(x,y,z)$ et $\zeta(x,y,z)$ respectivement par la fonction r et les composantes du vecteur $(A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$ transformé par la transformation précédente. En revenant à R_2 et en transformant en même temps la fonction $Q(x,y,z)$ et le champ de vecteurs $(L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z))$ qu'on vient d'obtenir, on trouve (après avoir pris les composantes du vecteur du champ transformé) quatre fonctions définies dans cette région, que l'on identifie respectivement à $F(x,y,z)$, $X(x,y,z,)$, $Y(x,y,z)$ et $Z(x,y,z)$.

On procèdera de même dans R_3; nous ferons correspondre au point de R_3 ayant pour coordonnées curvilignes r,θ,φ, le point de R dont les coordonnées seront

$$\bar{x}=r\cdot\sqrt{9-\left(\frac{2\varphi}{3\pi}+\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\cos\theta,$$
$$\bar{y}=r\cdot\sqrt{9-\left(\frac{2\varphi}{3\pi}+\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\sin\theta,$$
$$\bar{z}=\frac{2\varphi}{3\pi}+\frac{3}{2}.$$

Les fonctions $F(x,y,z)$, $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ et $Z(x,y,z)$ sont des fonctions de la classe C^∞ dans la région unicohérente R_0. Le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{X(x,y,z)}=\frac{dy}{Y(x,y,z)}=\frac{dz}{Z(x,y,z)}$$

n'a pas de singularités dans R_0 et admet la fonction $F(x,y,z)$ comme intégrale première. Cette intégrale première aussi ne

présente aucune singularité dans R_0. Cependant, le système précédent d'équations admet une infinité de caractéristiques fermées contenues dans l'intérieur de R_0; ce sont celles que nous avons signalées pour le système d'équations (10) dans R_1. L'exemple annoncé au début de cette Note est donc construit.

§ 4. Comme on pourrait se poser la question de savoir si un exemple de ce genre peut être construit avec des fonctions analytiques, peut-être vaut-il la peine d'indiquer brièvement comment on peut remplacer les fonctions $F(x,y,z)$, $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ et $Z(x,y,z)$ par des polynomes ayant encore les propriétés dont il s'agit.

D'abord rappelons qu'on peut arbitrairement approcher dans R_0 la fonction $F(x,y,z)$ ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre au moyen d'un polynome, soit $F^*(x,y,z)$ et de ses dérivées partielles respectives[1]). Pour aller plus loin, désignons par $\bar{t}$ le vecteur dont les composantes sont $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$, par $\bar{n}$ le gradient de $F(x,y,z)$ et par $\bar{n}^*$ celui de $F^*(x,y,z)$. Posons encore

$$\bar{v} = \bar{t} \wedge \bar{n},$$

à la suite de quoi le vecteur $\bar{t}$ est parallèle au vecteur $\bar{n} \wedge \bar{v}$ et a le même sens que celui-ci. Le vecteur $\bar{v}^*$ étant une approximation de $\bar{v}$ ayant pour coordonnées des polynomes, le vecteur

$$\bar{t}^* = \bar{n}^* \wedge \bar{v}^*$$

aura aussi ses coordonnées sous forme de polynomes, soit $X^*(x,y,z)$, $Y^*(x,y,z)$ et $Z^*(x,y,z)$, approchera en direction et en sens le vecteur $\bar{t}$ et sera exactement tangent aux surfaces $F^*(x,y,z) = C^{te}$.

En supposant les approximations suffisamment bonnes, il est facile de démontrer que le système d'équations

$$\frac{dx}{X^*(x,y,z)} = \frac{dy}{Y^*(x,y,z)} = \frac{dz}{Z^*(x,y,z)},$$

ainsi que son intégrale première $F^*(x,y,z)$, jouira dans R_0 de la propriété voulue.

---

[1]) Voir par exemple Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, Tome II, 2e édition, Louvain-Paris 1912, p. 135, théorème I et p. 129-130, Remarque.

ON BOOLE'AN FIELDS OF SUBSPACES IN AN ARBITRARY HILBERT SPACE. I.

By O. NIKODYM, Warszawa

This paper deals with closed linear manifolds in a HILBERT-HERMITE complex vector-space. Our purpose is to prove that each BOOLE'an field composed of such manifolds can be extended to a perfect field. (The definitions will be given in the sequel). The theorem holds both for separable and for non-separable spaces and will find application in subsequent papers by the author. I am indebted to Mr. J. v. NEUMANN for the valuable information that the theorem may be proved by his methods of week convergence and his theory of „Operatorenringe". Our proof is based on geometrical methods only and is independent of the general theory of operations. It uses only the properties of the projection of a vector on a subspace of the space considered. We shall recall some fundamental properties of the Hilbert-space; this seems to be usefull, since the separability of the space is not supposed. The theorem and general idea of the proof were the subject of a communication at the *III. Polish Mathematical Congress in Warsaw 1937* [1]).

§ 1. Preliminary concepts.

1.1. *Notations.* Given any condition (propositional-function) $\varphi(\cdot x \cdot)$, we denote by $\hat{x}\varphi(\cdot x \cdot)$ the set of all the elements a for which the proposition $\varphi(\cdot a \cdot)$ is true. The symbol $\hat{x}\hat{y}f(\cdot x, y \cdot)$ denotes the relation which holds between the element a and the element b, if and only if the proposition $\varphi(\cdot a, b \cdot)$ is true.

---

[1]) *III Congrès Polonais de Mathématique, Warszawa 28 IX — 3 X 1937.*

Extrait des „Annales de la Soc. Polon. de Math." Tome XVI. Année 1937. Cracovie 1938, p. 191.

If a is a set, then $\bar{\bar{a}}$ denotes the power (cardinal number) of a. The proposition $a \epsilon a$ indicates that a is an element of the class a; $a \bar{\epsilon} a$ indicates that a does not belong to a. $a \underset{\mathrm{df}}{=} b$ will say that a denotes, by definition, the same thing as b. The symbols $a \subset b$, $a \supset b$, $a+b$, $a \cdot b$, where a, b are sets, have the usual meaning, as in the general theory of sets. 0 denotes the empty set, 1 the universal set. Ia denotes the set composed of the only element a.

1.2. We shall call *abstract* (or *general*) *vectors* the elements of a given not empty class of arbitrary mathematical things $x, y, \ldots$, provided that they are axiomatised as follows:

The fundamental notions are:

1⁰ $x = y$, *(x equal to y)*.

2⁰ $x+y$, (the *sum of x and y*; this operation being always possible and giving a vector).

3⁰ $\lambda \cdot x$ or $x \cdot \lambda$ (*the multiplication of the vector x by the complex number* λ; always possible and giving a vector).

4⁰ (x,y), (*the scalar product of the vectors x and y*; always possible and giving a complex number).

Axioms:

I. $x = x$; if $x = y$, then $y = x$; if $x = y$, $y = z$, then $x = z$.

If $x = x'$, $y = y'$, $\lambda = \lambda'$ then $x+y = x'+y'$, $\lambda \cdot x = \lambda' \cdot x'$, $(x,y) = (x',y')$.

II. $x+y = y+x$; $x+(y+z) = (x+y)+z$; if $x+y = x+y'$, then $y = y'$; $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$; $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; $1 \cdot x = x$.

We deduce from these axioms the unitary existence of a special vector $\vec{0}$, called the *null-vector*, having the properties: $x + \vec{0} = x$, $0 \cdot x = \vec{0}$ for every vector x.

III. $(x,y) = \overline{(y,x)}$[1]; $(x, y+z) = (x,y)+(x,z)$; $(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$; $(x,x) \geqslant 0$; $(x,x) = 0$ is equivalent to $x = \vec{0}$.

The set of all the vectors is called *Hilbert-space*[2].

---

[1]) If a is a complex number, $a = a + ib$, then $\bar{a}$ denotes the number $a - ib$.

[2]) See f. inst. M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to Analysis*. New York (Amer. Math. Soc.) 1932.

We mention the following consequences: the *substraction* $x-y$ *of vectors* can be defined as the inverse operation to the addition of vectors.

We put $-x \underset{\text{df}}{=} (-1)\cdot x$. We have $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$, $(\lambda x,y)=\bar{\lambda}\cdot(x,y)$.

1.3. In the sequel we shall consider sets of vectors, but we shall us confine everytimes to sets E satisfying the following *condition of extensionality* [1]): *if* $x \varepsilon E$ *and* $x=x'$, then $x' \epsilon E$.

1.4. The non-negative number $|x| \underset{\text{df}}{=} \sqrt{(x,x)}$ is called the *absolute value of* x. The vector x is said to be *normalized*, if $|x|=1$. The following relations are very known:

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, \quad (\text{Minkowski's } \textit{inequality})$$
$$|(x,y)| \leqslant |x|\cdot|y|, \quad (\text{Cauchy's } \textit{inequality}).$$

1.5. The number $|x-y|$ may be called *the distance of* x *and* y. This notion satifies all the conditions required for the notion of distance in the Hausdorf's metrical topology: $|x-y|=|y-x|$; $|x-y|=0$ if and only if $x=y$;

$$|x-y| \leqslant |x-z|+|z-y|.$$

1.6. The infinite sequence $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ may be said *to converge toward* x, and x may be called *the limit of* $\{x_n\}$, $x=\lim x_n$, if

$$\lim_{n\to\infty} |x-x_n|=0.$$

We have $\lim(x_n+y_n)=\lim x_n+\lim y_n$, $\lim(\lambda x_n)=\lambda \lim x_n$, whenever the limits $\lim x_n$, $\lim y_n$ exist. If $\lim x_n=x$, $\lim y_n=y$, then $\lim(x_n,y_n)=(x,y)$, $\lim|x_n|=|x|$. The proofs are based on *1.4* and *1.5*.

1.7. The vectors $x_1,x_2,\dots,x_n$, $(n\geqslant 1)$, are said *to be independent*, if the relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\cdot x_i=\vec{0}$ implies $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n$.

If for each natural number n there exist n independent vectors, the space is said to be *of infinite dimensions*.

[1]) The term is borrowed from Russel et Whitehead's, *Principia Mathematica*.

1.8. By *1.5* the Hilbert-space is a topological metrical space. It may be *complete* and *separable* or not; it may be of finite or infinite dimension.

1.9. Given any non-complete HILBERT-space, we can always make it complete by means of the following method borrowed from the CANTOR's theory of irrational numbers.

The infinite sequence $\{x_n\}$ of vectors may be termed *fundamental sequence* if, whatever $\varepsilon > 0$ may be, we have $|x_n - x_m| < \varepsilon$, provided that n and m are sufficiently great. Two fundamental sequences $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ may be said *to be equivalent*, if $\lim\limits_{n,m} |x_n - x_m| = 0$. Now each saturated class of mutually equivalent fundamental sequences may be called *quasivector*. The equality, the addition, the multiplication by a scalar, and the scalar multiplication for quasivectors may be defined in a very natural manner which imitates the definitions admitted in the CANTORS theory of irrational numbers. By *1.6* we obtain a new HILBERT-space which is complete and which contains a set of quasivectors perfectly isomorph to the given not complete HILBERT-space. Thus without loss of generality we can us confine to complete HILBERT spaces.

1.10. In the sequel we shall suppose that the HILBERT-space is complete. Separability will not be supposed at all. It is easy to define a non-separable HILBERT-space. For instance call vector each transfinite sequence $\{a_\alpha\}$, $(\alpha = 1, 2, \dots, \omega, \dots < \Omega)$ of the ordinal type Ω, such that the sum $\sum\limits_{\alpha=1}^{\Omega} |a_\alpha|^2$, is finite. Of course there can exist only an at most enumerable number of not vanishing terms. The equality, the sum, the product may be easily defined; the scalar product of $\{a_\alpha\}$ and $\{b_\alpha\}$ is $\sum\limits_{\alpha=1}^{\Omega} \overline{a}_\alpha \cdot b_\alpha$ It is easy to prove that the HILBERT space thus defined is non-separable.

1.11. Two vectors x, y are said to be *orthogonal*, if $(x, y) = 0$. We shall write $x \perp y$. The only vector orthogonal to every one is the null-vector. The set of vectors $\{x_\alpha\}$ is said to be *orthonormal* if $|x_\alpha| = 1$ and $x_\alpha \perp x_\beta$ whenever $\alpha \neq \beta$. The orthonormal set $\{x_\alpha\}$ is called *saturated*, if the relation $x_\alpha \perp y$ holding for every x_α implies $y = \vec{0}$.

If the space is separable, each orthonormal set is at most enumerable and vice-versa.

1.12. Given an orthonormal set $\{x_\alpha\}$ and a vector y, we call the numbers (x_α, y) *the* FOURIER-*coefficients of* y *with respect to* $\{x_\alpha\}$, and the sum

$$\sum_\alpha (x_\alpha, y)\, x_\alpha$$

the FOURIER-*sum of* y *with respect to* $\{x_\alpha\}$.

1.13. In a Fourier-sum there are at most an enumerable number of terms different from *0*. To show it, observe that, given any finit number of indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, we have

$$\text{(1)} \qquad \Big|\sum_{s=1}^{n} (x_{\alpha_s}, y) \cdot x_{\alpha_s}\Big|^2 = \sum_{s=1}^{n} |(x_{\alpha_s}, y)|^2.$$

The relation $|y - \sum_{s=1}^{n} (x_{\alpha_s}, y)\, x_{\alpha_s}|^2 \geqslant 0$ gives at once, by (1):

$$|y|^2 - 2\sum_{s=1}^{n} (x_{\alpha_s}, y)(y, x_{\alpha_s}) + \sum_{s=1}^{n} |(x_{\alpha_s}, y)|^2 \geqslant 0,$$

and then

$$\sum_{s=1}^{n} |(x_{\alpha_s}, y)|^2 \leqslant |y|^2 \quad \text{(BESSEL's } \textit{inequality}\text{)}.$$

Thus the Fourier-sum may be always considered as an ordinary series.

1.14. If the orthonormal set is saturated, we have

$$y = \sum_\alpha (x_\alpha, y) \cdot x_\alpha$$

whatever y may be.

The general proof is the same as in the case of separability [1]).

1.15. By a *linear manifold* we shall understand every not empty set E of vectors satisfying the following conditions:

1⁰ if $x, y \in E$, then $x + y \in E$.

2⁰ if $x \in E$, then $\lambda \cdot x \in E$ for each complex number λ.

Closed linear manifolds will be termed *subspaces* of the given HILBERT-space, and briefly *subspaces* or *spaces*.

---

[1]) See the cited work of Mr. Stone.

Each subspace may be considered as a HILBERT-space, because his vectors fulfill all the axioms specified in *1.2.* Trivial subspaces are 1) the whole Hilbert space, denoted by 1, 2) the *null-space*, containing the null vector only; it may be denoted by 0. A subspace different from 0 and 1 may be called a *proper subspace*.

1.16. Given any not empty set E of vectors there exist the smallest subspace containing E. It may be termed: *the subspace determined by E.* To prove the unitary existence of this subspaces it suffices to take the common part of all the subspaces containing E.

1.17. Given any not empty vector-set E, the vector y may be called *independent from E*, if y does not belong to the subspace determined by E.

1.18. Given a subspace a and a vector x, there exist one and only one vector y, satisfying the following conditions:

$$y \epsilon a, \qquad x - y \perp z \qquad \text{for every } z \epsilon a.$$

This vector y is called *the projection of x on a* and it may be denoted by $\mathrm{Proj}_a x$ or briefly by x_a.

We shall give the outline of proof of the unitary existence of the projection, because we do not suppose the separability of the given Hilbert space.

Let us consider the set of all the vectors $\neq \vec{0}$, belonging to a, expanded in a transfinite sequence without repetitions:

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\omega, \ldots$$

We shall construct a new sequence by the following inductive manner. We put $y_1 \underset{\mathrm{df}}{=} x_1$. Suppose determined the vectors y_γ for each ordinal index less than a given $\alpha > 1$. Taking the set of all these vectors y_γ, and determining the smallest ordinal number α', for which $x_{\alpha'}$, is independent from it, let us put $y_\alpha \underset{\mathrm{df}}{=} x_{\alpha'}$. The sequence

$$(2) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_\omega, \ldots$$

is thus perfectly determined. We prove easily that each vector (2) does not depend from the preceding ones and that each

vector (1) depends from (2). Now we transform (2) in a new sequence by means of a process analogous to the known orthogonalising process of Schmidt: Put

$$z_1 \underset{\text{df}}{=} \frac{y_1}{|y_1|}.$$

Suppose defined the vectors z_γ for every $\gamma<a$, where $a>1$. Suppose that the vectors z_γ constitute an orthonormal set and further, that the sets $\{y_\gamma\}$ and $\{z_\gamma\}$ determine the same subspace. Let us define

$$y'_a \underset{\text{df}}{=} y_a - \sum_{\gamma<a}(z_\gamma, y_a)\, z_\gamma,$$

$$z_a \underset{\text{df}}{=} \frac{y'_a}{|y'_a|}.$$

Let us denote by p_a the space determined by the vectors y_γ. Since $\sum\limits_{\gamma<a}(z_\gamma, y_a)\cdot z_\gamma \epsilon p_a$ and $y_a \bar{\epsilon} p_a$, we have $y'_a \neq \vec{0}$.

Further we have, by *1.6*, *1.13* for any $\gamma'<a$:

$$(z_{\gamma'}, z_a) = \frac{1}{|y'_a|}\cdot[(z_{\gamma'}, y_a) - \sum_{\gamma<a}(z_\gamma, y_a)\cdot(z_{\gamma'}, z_\gamma)]$$
$$= \frac{1}{|y'_a|}\cdot[(z_{\gamma'}, y_a) - (z_{\gamma'}, y_a)] = 0,$$

which proves that $z_a \perp z_{\gamma'}$, for $\gamma'<a$. We have $|z_a|=1$. Evidently the sets $\{y_\gamma, y_a\}$, $\{z_\gamma, z_a\}$ determine the same subspace. The above argument shows that

$$z_1, z_2, \ldots, z_\omega, \ldots$$

is an orthonormal set, determining the subspace a.

This being stated, let us take the vector x and put

(3) $$y \underset{\text{df}}{=} \sum_a (z_a, x)\cdot z_a.$$

It may be shown that $y \epsilon a$ and that $x-y$ is orthogonal to each z_a and therefore to each x_a. Thus y is a projection of x on a. There exist only one such a projection. If we suppose that $y', y'' \epsilon a$ and that $x-y'$ and $x-y''$ are both orthogonal to any vector in a, we have $y'-y'' \epsilon a$ and therefore $(x-y', y'-y'')=0$, $(x-y'', y'-y'')=0$, which gives $(y'-y'', y'-y'')=0$, i. e. $y'=y''$.

1.19. The formula (3) furnishes us different properties of the projection. Let us mention the following ones:

$\mathrm{Proj}_a(x+y)=\mathrm{Proj}_a x+\mathrm{Proj}_a y$; $\mathrm{Proj}_a(\lambda x)=\lambda \mathrm{Proj}_a x$;

$|\mathrm{Proj}_a x|\leqslant|x|$; $(\mathrm{Proj}_a x, y)=(x, \mathrm{Proj}_a y)$; $\mathrm{Proj}_a \mathrm{Proj}_a x=\mathrm{Proj}_a x$;

if $\lim x_n=x$, then $\lim \mathrm{Proj}_a x_n=\mathrm{Proj}_a x$.

1.20. Two subspaces a, b are said to *be disjoint*, if they have no common vector excepted the vector $\vec{0}$. They are said to be *orthogonal* ($a\perp b$) if every vector of a is orthogonal to every vector of b. Orthogonal spaces are always disjoint.

The vector x is orthogonal to a, ($x\perp a$) if x is orthogonal to each vector of a.

1.21. If $a\perp b$ and c is the space determined by the set $a+b$, then

$$\mathrm{Proj}_c x=\mathrm{Proj}_a x+\mathrm{Proj}_b x,$$

and if $x\epsilon a$, then $\mathrm{Proj}_b x=\vec{0}$.

If $x\epsilon c$ then there exist one and only one decomposition $x=x'+x''$, where $x'\epsilon a$, $x''\epsilon b$; we have $x'=\mathrm{Proj}_a x$, $x''=\mathrm{Proj}_b x$.

1.22. If 1^0 $\{a_\alpha\}$ is a set of mutually orthogonal spaces;

2^0 a is the space determined by the set $\sum\limits_\alpha a_\alpha$;

3^0 $x\epsilon 1$;

then

1) $\mathrm{Proj}_a x=\sum\limits_\alpha \mathrm{Proj}_{a_\alpha} x$;

2) $|\mathrm{Proj}_a x|^2=\sum\limits_\alpha |\mathrm{Proj}_{a_\alpha} x|^2$.

1.23. We call *abstract* or *general* BOOLE'*an field* each not empty set of arbitrary elements $a, b, \ldots$ if we admit the following axiomatisation [1]):

Fundamental notions:

1. $a=b$ (the element a *equal to* b).

2. $a\subset b$ (or $b\supset a$), (the element a *is included in* b, *the element* b *includes* a).

3. $a+b$ (*the sum*; operation always possible and giving an element).

---

[1]) See A. Tarski, *Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. I.* Fund. Math. XXIV (1935), pp. 177-198.

4. $a \cdot b$ (*the product*; always possible and giving an element).

5. $\mathrm{co}\, a$ (*the complementary or negation of* a; always possible and giving an element).

6. 0 *the null-element.*

7. 1 *the universal element.*

Axioms.

1. $a = a$; if $a = b$, $b = c$, then $a = c$; if $a = b$, then $b = a$;
2. if $a = a'$, $b = b'$, then $a + b = a' + b'$, $a \cdot b = a' \cdot b'$, $\mathrm{co}\, a = \mathrm{co}\, a'$;
3. $a \subset a$; if $a \subset b$, $b \subset c$, then $a \subset c$;
4. $a = b$ if and only if $a \subset b$ and $b \subset a$;
5. $a \subset a + b$; $b \subset a + b$; if $a \subset c$, $b \subset c$, then $a + b \subset c$;
6. $a \cdot b \subset a$; $a \cdot b \subset b$, if $c \subset a$, $c \subset b$, then $c \subset a \cdot b$;
7. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a + b \cdot c = (a + c) \cdot (b + c)$;
8. $0 \subset a$; $a \subset 1$;
9. $a \cdot \mathrm{co}\, a = 0$; $a + \mathrm{co}\, a = 1$.

1.24. It follows from these axioms that $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. If we put $a - b \underset{\mathrm{df}}{=} a \cdot \mathrm{co}\, b$, we see that all the formal properties of abstract sets hold for the elements of a BOOLE'an field. Of course the symbol $x \epsilon a$ is meaningless.

We mention the de MORGAN's *laws*:

$$\mathrm{co}(a + b) = \mathrm{co}\, a \cdot \mathrm{co}\, b, \qquad \mathrm{co}(a \cdot b) = \mathrm{co}\, a + \mathrm{co}\, b.$$

Two elements a, b are said to *be disjoint*, if $a \cdot b = 0$.

1.25. The BOOLE'an field is said to be *perfect* if we introduce infinite operations:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

satisfying the following conditions:

10. if $a_n \subset b$, $(n = 1, 2, \ldots)$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \subset b$; $a_m \subset \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

11. if $b \subset a_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, then $b \subset \prod_{n=1}^{\infty} a_n$; $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \subset a_m$;

12. $b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b \cdot a_n)$, $b + \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} (b + a_n)$.

This paper deals with a realisation of BOOLE'an fields: its elements are subspaces of a given complete HILBERT-space.

§ 2. **Finit operations on spaces.** In the sequel we shall consider subspaces of the given HILBERT space *1*. We shall speak briefly „spaces" and denote them by latin latters $a, b, c, \dots$ Vectors will be symbolised by $x, y, z, \dots$

Definition 2.1. A space a is said *to be contained in the space* b, if each vector of a belongs to b. We shall write $a \subset b$, or $b \supset a$, and call *a subspace of* b.

Evidently $a \subset a$, $0 \subset a$, $a \subset 1$. Further, the relations $a \subset b$, $b \subset c$ imply $a \subset c$. The inclusion of spaces is a particular case of the inclusion of vector-sets. We shall use some operations on spaces:

Definition 2.2. By *the product* $a \cdot b$ *of two spaces* a, b we shall mean the largest closed space c contained in a and b together.

It is easy to see that there can exist at most only one such a closed space c and it may be shown, in a simple manner, that $a \cdot b$ is identical with the set of all the common vectors of a and b.

The multiplication of spaces is commutative and associative: $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. We have also the following relations: $a \cdot 1 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot a = a$, $a \cdot b \subset a$, $a \cdot b \subset b$. If $a \subset b$ and $a' \subset b'$, we have also $a \cdot a' \subset b \cdot b'$. If $a \cdot b = 0$, the spaces a, b are *disjoint*, and vice-versa. The product of two spaces is a particular case of the product of vector-sets.

Definition 2.3. By the *sum* $a + b$ of *two spaces* a, b we shall mean the smallest closed[1]) space c containing both a and b.

Obviously there can existe at most only one space c verifying that condition and it is easy to prove that $a + b$ coincides with the closure of the set of all the vectors $x + y$, where $x \epsilon a$, $y \epsilon b$.

It is interesting to mention that Mr. Stone has given an example of two spaces a, b, for which $a + b$ differs[2]) from the set of all the vectors $x + y$, where $x \epsilon a$, $y \epsilon b$.

---

[1]) Mr. Stone, l. c. (p. 21) uses the notation: $a \oplus b$.

[2]) Stone, l. c. p. 21-22.

We verify easily that the following relations are true: $a+0=a$, $a+1=1$, $a+a=a$, $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$ and this space is equal to the closure of the set of all the vectors $x+y+z$, where $x \in a$, $y \in b$, $z \in c$. Further we find: $a \subset a+b$, $b \subset a+b$; if $a \subset b$, $a' \subset b'$, then $a+a' \subset b+b'$.

Observe that, though the inclusion $a \cdot c+b \cdot c \subset (a+b) \cdot c$ holds always, the relation $a \cdot c+b \cdot c=(a+b) \cdot c$ is generally not true. The following theorem is obvious:

Theorem 2.1. *If $a' \perp b$, $a'' \perp b$, we hawe also $(a'+a'') \perp b$.*

Theorem 2.2. *If a, b are orthogonal, then $a+b$ coincides with the set consisting of all the vectors $x+y$, where $x \in a$, $y \in b$.*

Proof. Denoting the set in question by M, we have:

$$M \subset a+b. \tag{1}$$

Let $z \in a+b=\overline{M}$; there exist a sequence $\{z_n\}=\{x_n+y_n\}$, where $x_n \in a$, $y_n \in b$, $z_n \to z$. Since $y_n=(z_n-x_n) \perp a$, $x_n=(z_n-y_n) \perp b$, we have $x_n=\mathrm{Proj}_a z_n$, $y_n=\mathrm{Proj}_b z_n$. We know, by *1.19*, that the operation of taking projection is a continuous one. Therefore

$$\mathrm{Proj}_a z=\lim_n \mathrm{Proj}_a z_n, \qquad \mathrm{Proj}_b z=\lim_n \mathrm{Proj}_b z_n,$$

from which it follows that the limits $\lim_n x_n$, $\lim_n y_n$ exist. The spaces a, b being closed, we get $\lim_n x_n \in a$, $\lim_n y_n \in b$ and hence

$$z=\lim_n z_n=\lim_n x_n+\lim_n y_n \in M.$$

This being established, (1) completes the proof.

Theorem 2.3. *If a,b,c are mutually orthogonal spaces and if $p=a+b$, $q=b+c$, the space $p+q$ coincides with the set of all the vectors $x+y$, where $x \in p, y \in q$.*

Proof. We have $p+q=(a+b)+(b+c)=a+(b+b)+c=$ $=(a+b)+c$. Since $a \perp c$, $b \perp c$ we have also (see *theor. 2.1*) $(a+b) \perp c$. On account of the *theor. 2.2*, $p+q$ is identical with the set of all the vectors $x+y$, where $x \in a+b=p$, $y \in c \subset b+c=q$. Consequently the set $p+q$ is contained in the set r of all the vectors $x'+y'$, where $x' \in p$, $y' \in q$. Since $p+q=\overline{r}$ and $p+q \subset r$, it follows $\overline{r} \subset r$ and therefore $\overline{r}=r$, which gives $p+q=r$.

Definition 2.4. Given any space a we call *the complementary of it*, co a, the set of all the vectors which are orthogonal to a.

It may be easily sean that co$a$ is a space. This is a consequence of the fact, that the relation $\lim_n x_n = x$ implies $\lim_n (x_n, y) = (x, y)$ for any vector y, (see *1.6*).

We have co$0=1$, co$1=0$, co(co$a$)$=a$, $a\cdot$co$a=0$, $a+$co$a=1$; if $a\subset b$, then co$a\supset$co$b$.

Definition 2.5. We call *difference* $a-b$ of spaces a, b the space $a\cdot$co$b$.

Theorem 2.4. *We have for any spaces a, b:*

$$\mathrm{co}(a+b)=\mathrm{co}a\cdot\mathrm{co}b, \qquad \mathrm{co}(a\cdot b)=\mathrm{co}a+\mathrm{co}b.$$

(These formules are analogous to the known DE MORGAN'S law's of the formal logic).

Proof. To prove the first formula, suppose $x\in\mathrm{co}a\cdot\mathrm{co}b$. We have $x\perp a$, $x\perp b$, which gives *(theor. 2.1)* $x\perp(a+b)$. It tollows

(1) $$\mathrm{co}a\cdot\mathrm{co}b\subset\mathrm{co}(a+b).$$

Conversely, if $x\in\mathrm{co}(a+b)$ we have $x\perp(a+b)$, hence $x\perp a$, $x\perp b$, for a, b are contained in $a+b$. Hence x is orthogonal to each vector belonging to a and b, and consequently, $x\perp(a\cdot b)$, which gives $x\in\mathrm{co}(a\cdot b)$. The relation $\mathrm{co}(a+b)\subset\mathrm{co}(a\cdot b)$, thus obtained, gives, on account of (1), the required equation. The second relation of the theorem follows from the first by taking the complementary.

We shall now establish some auxiliary properties of the operation introduced above.

Lemma 1. If $a\subset b$, then $b=a+(b-a)$.

Proof. The relation

(1) $$a+(b-a)\subset b$$

is obvious, for $a\subset b$, $b-a=b\cdot\mathrm{co}a\subset b$. To prove the converse inclusion, let $x\in b$. Take $y \underset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Proj}_a x$. Since $a\subset b$ and $y\in a$, we have $y\in b$. On the other hand, on account of the definition of the projection (*1.18*), we have $x-y\perp a$; hence $x-y\in\mathrm{co}a$.

It follows: $x-y\epsilon b\cdot \mathrm{co}a=b-a$. Since $x=y+(x-y)$ and $y\epsilon a$, $x-y\epsilon b-a$, we conclude that $x\epsilon a+(b-a)$. Thus we obtain $b\subset a+(b-a)$, which combined with (1) gives the required equation.

The lemma thus established gives at once the equation:

Theorem 2.5. *$a=a\cdot b+(a-a\cdot b)$ for any two spaces a, b.*

Let us observe that the equation $a-b=a-a\cdot b$ is not true everytimes, as we may easily see by means of simple examples.

Theorem 2.6. *If $(a-a\cdot b)\perp(b-b\cdot a)$, we have $a-b=a-a\cdot b$, $b-a=b-b\cdot a$.*

Proof. The inclusion

$$b-a\subset b-b\cdot a \tag{1}$$

follows from $b\cdot a\subset a$, which gives $\mathrm{co}\,a\subset \mathrm{co}(b\cdot a)$.

To prove the converse inclusion, suppose $x\epsilon b-b\cdot a$ We have $x\perp(b\cdot a)$; then by the hypothesis and *theor.* 2.1, $x\perp b\cdot a+(a-a\cdot b)$. Hence, by *theor. 2.5*, $x\perp a$. Since $x\epsilon b$, $x\epsilon \mathrm{co}\,a$, we get $x\epsilon b\cdot \mathrm{co}\,a=b-a$. It follows

$$b-b\cdot a\subset b-a. \tag{2}$$

The relations (1) and (2) give together

$$b-b\cdot a=b-a.$$

The second identity of the theorem is quite analogous.

Theorem 2.7. *If $(b-a\cdot b)\perp(a-a\cdot b)$, then*

$$b=a\cdot b+(b-a) \tag{1}$$

$$a+b=a\cdot b+(a-b)+(b-a). \tag{2}$$

Proof. The relation (1) follows from the known identity $b=a\cdot b+(b-a\cdot b)$, *(theor. 2.5)* by application of the preceding *theorem 2.6*.

To prove the second, observe that

$$a=a\cdot b+(a-b),\qquad b=a\cdot b+(b-a)$$

hence

$$a+b=a\cdot b+(a-b)+(b-a).$$

Theorem 2.8. *The relation* $(b-a\cdot b)\cdot(a-a\cdot b)=0$ *is always true.*

Proof. If $x\epsilon b-a\cdot b$, $x\neq\vec{0}$, we have $x\bar{\epsilon}a\cdot b$, hence $x\bar{\epsilon}a$, for if not, it would be $x\epsilon a$, $x\epsilon b$ and consequently $x\epsilon a\cdot b$, which is impossible. Hence $x\bar{\epsilon}a-a\cdot b$, for $a-ab\subset a$. Therefore if $x\epsilon(b-a\cdot b)\cdot(a-a\cdot b)$, we have necessarily $x=\vec{0}$.

§ 3. Field of spaces. The operations having been introduced and their general properties established, we define a fundamental notion, which will be the object of the present paper.

Definition 3.1. We shall terme *field of spaces* every not empty class S of subspaces of the given HILBERT-space 1, fulfilling the following conditions:

1^0 if $a\epsilon S$, then co$a\epsilon S$,

2^0 if $a,b\epsilon S$, then $a\cdot b\epsilon S$,

3^0 if $a,b\epsilon S$ and $a\cdot b=0$, then $a\perp b$.

(The reader may notice that the condition 2^0 can be replaced by „if $a,b\epsilon S$, then $a+b\epsilon S$", which amounts to the same).

In the sequel of the present § we shall consider a given fixed field S.

Theorem 3.1. $0\epsilon S$, $1\epsilon S$.

Proof. In fact, S beeing not empty there is a certain space a belonging to S. Then co$a\epsilon S$, and therefore $a\cdot$co$a=0\epsilon S$. Since $1=$co0, we conclude that $1\epsilon S$.

Theorem 3.2. *If* $a,b\epsilon S$, *we have* $a-b\epsilon S$ *and* $a+b\epsilon S$.

Proof. The first of these relations follows from the identity $a-b=a\cdot$co$b$. To see the truth of the second, it is sufficient to observe that $a+b=$co(co$a\cdot$co$b$) (see *theor. 2.4*).

Previously we have observed (§ 2) that for any three spaces a,b,c, the identity $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ is not generally true. But we shall see, that it is always verified for any spaces of a given field. To prove it we shall first establish a lemma, which will be also applied much more later.

Lemma. If a,b,c are mutually orthogonal spaces and if $a=a\cdot d+(a-d)$, $b=b\cdot d+(b-d)$, $c=c\cdot d+(c-d)$, then $(a+b+c)\cdot d=a\cdot d+b\cdot d+c\cdot d$.

Proof. We have

$$a+b+c=a\cdot d+(a-d)+b\cdot d+(b-d)+c\cdot d+(c-d),$$

where the six spaces on the right are mutually orthogonal. Let $x\epsilon d\cdot(a+b+c)$; hence $x\epsilon d$, $x\epsilon a+b+c$. Applying the known property of the projection, we get:

$$x=\mathrm{Proj}_{a\cdot d}x+\mathrm{Proj}_{a-d}x+\mathrm{Proj}_{b\cdot d}x+\mathrm{Proj}_{b-d}x+\mathrm{Proj}_{c\cdot d}x+\mathrm{Proj}_{c-d}x.$$

But $\mathrm{Proj}_{a-d}x=\mathrm{Proj}_{b-d}x=\mathrm{Proj}_{c-d}=\vec{0}$, for $x\epsilon d$. Thus our equation reduces to:

$$x=\mathrm{Proj}_{a\cdot d}x+\mathrm{Proj}_{b\cdot d}x+\mathrm{Proj}_{c\cdot d}x,$$

hence $x\epsilon a\cdot d+b\cdot d+c\cdot d$. It follows that:

(1) $$(a+b+c)\cdot d\subset a\cdot d+b\cdot d+c\cdot d.$$

From the other side we have $a\cdot d\subset(a+b+c)\cdot d$, etc., since $a\subset a+b+c$ etc. Hence

(2) $$ad+bd+cd\subset(a+b+c)\cdot d.$$

The relations (1) and (2) give the required identity.

Theorem 3.3. *If* $a,b,c\epsilon S$, *then* $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

Proof. Observe first that given any two spaces p,q of S, we have, according to *theor. 2.8*, $(p-p\cdot q)\cdot(q-p\cdot q)=0$ and then, on account of the condition 3^0 of the *Def. 3.1* $(p-p\cdot q)\perp(q-p\cdot q)$. This gives *(theor. 2.7)* $p=p\cdot q+(p-q)$, and $p+q=p\cdot q+(p-q)+(q-p)$. This having been observed, we have

$$a+b=(a-b)+a\cdot b+(b-a),$$

where the spaces on the right are mutually orthogonal. The lemma proved abowe gives therefore:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c&=(a-b)\cdot c+a\cdot b\cdot c+(b-a)\cdot c\\&=[(a-b)\cdot c+a\cdot b\cdot c]+[(b-a)\cdot c+b\cdot a\cdot c]\\&=[a\cdot c\cdot \mathrm{co}\,b+a\cdot b\cdot c]+[b\cdot c\cdot \mathrm{co}\,a+b\cdot a\cdot c]\\&=[(a\cdot c-b)+(a\cdot c)\cdot b]+[(b\cdot c-a)+(b\cdot c)\cdot a],\end{aligned}$$

therefore, since $a\cdot c$, $b\cdot c$ belong to S,

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

Theorem 3.4. *The operations of addition, multiplication, substraction and of taking the complementary when applied to spaces of a given field and in connexion with the relation of inclusion of spaces have all the fundamental formal properties holding for the analogous logical operations for abstract sets.*

It follows from the theorems proved above.

The fields of spaces is thus an analogon of an additive class of sets, and therefore it is possible to introduce the notion of measure for spaces [1]). This will be made in subsequent papers by the author. The following problem seems to be interesting: Suppose we have defined the multiplication and the addition of spaces as before. Suppose that for a class of spaces we have axiomatised the complementary in such a manner that the axioms of the Boole's algebra are satisfied [2]). We ask whether it is possible to define the scalar product (x,y) of vectors in such a manner, that the class of spaces in question be a field.

§ 4. Infinite operations on spaces.

Till now we have dealt exclusively with finite operations applied to spaces. In order to treat also the infinite ones, we introduce the following definition:

Definition 4.1. Given any infinite sequence $\{a_n\}$ of spaces, we call *their sum* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ the smallest closed space including each a_n and, similarily, we call *their product* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ the largest closed space included simultaneously in each a_n.

The infinite sum and product are well determined and they existe always, as we shall prove it at once.

First we shall see that there can exist at most only one such a smallest closed space, which includes every a_n. Supposing indeed, that a', a'' are two such spaces, we have $a' \subset a''$, because a' is the smallest space. For the same reason we have also $a'' \subset a'$; hence $a' = a''$.

It remains only to establish the existence of the sum. We do it by proving the following theorem, which will be also used in the sequel.

---

[1]) O. Nikodym, *Sur la mesure vectorielle parfaitement additive dans un corps abstrait de Boole.* Acad. Roy. de Belgique, vol. XVII.

[2]) See A. Tarski, l. c.

Theorem 4.1. *If $\{a_n\}$ is an infinite sequence of spaces, then putting $b_n \underset{\mathrm{df}}{=} a_1 + \ldots + a_n$, $(n=1,2,\ldots)$, the sum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ coincide with the set b of limits of all the convergent sequences $\{x_n\}$, where $x_n \in b_n$.*

Proof. We begin by proving that b is a closed space. Given any two vectors x, y belonging to b, we have

$$x = \lim_n x_n, \quad \text{where} \quad x_n \in b_n,$$
$$y = \lim_n y_n, \quad \text{where} \quad y_n \in b_n.$$

Hence $x + y = \lim_n (x_n + y_n)$. Since $x_n + y_n \in b_n$, we have $x + y \in b$.

Similarly taking any number λ and choosing any vector x of b, we have $x = \lim_n x_n$, where $x_n \in b_n$; hence $\lambda x = \lim_n (\lambda x_n)$. The vector λx_n belonging to b_n, it follows that $\lambda x \in b$. Thus we have proved that b is a subspace of the given Hilbert space 1.

Now we must show that b is closed. Suppose that $z_n \in b$, $(n=1,2,\ldots)$, $\lim_n z_n = z$. We have $z_n = \lim_n z_{n,k}$ for conveniently chosen vectors $z_{n,k} \in b_k$, $(k=1,2,\ldots)$.

Let $\varepsilon > 0$; we have $|z - z_n| < \varepsilon/2$ provided that $n \geqslant \mu(\varepsilon)$, where $\mu(\varepsilon)$ is a certain number depending from ε. Similarly $|z_n - z_{n,k}| < \varepsilon/2$, if $k \geqslant \nu(\varepsilon, n)$. Now, fixe $n \geqslant \mu(\varepsilon)$ and find $\nu(\varepsilon, n)$; we obtain for $k \geqslant \nu(\varepsilon, n)$:

$$|z - z_{n,k}| < \varepsilon, \qquad z_{n,k} \in b_k.$$

Choosing $\varepsilon_m \to 0$, we can thus find a sequence of vectors ξ_m, $(m=1,2,\ldots)$, where $\xi_m \in b_{k_m}$, $(k_1 < k_2 < \ldots)$ in the manner as to have

$$|z - \xi_m| < \varepsilon_m.$$

Since $b_1 \subset b_2 \subset \ldots$, we obtain, by repeating — if necessary — vectors ξ_m, a sequence $\{\eta_s\}$ of vectors, where $\eta_s \in b_s$, $(s=1,2,\ldots)$ and $\lim_s \eta_s = z$. This proves that b is a closed set of vectors.

It is obvious that $a_n \subset b$, for if $x \in a_n$, we have $x \in b_n$, $x \in b_{n+1}, \ldots$, which gives $x = \lim x \in b$. To prove the property of minimum for b, suppose b' be a closed space including each a_n. We shall prove that $b \subset b'$. We have, indeed, given any vector $y \in b$, $y = \lim_n y_n$ for some $y_n \in b_n$. Since $b_n \subset b'$, we have also $y_n \in b'$, and therefore $y \in b'$, because b' is closed. Thus we have established the relation $b \subset b'$ which completes the proof of the theorem.

The theorem *4.1* beeing thus established, we have proved, at the same time, the required unitary existence of the infinite sum.

The existence of the infinite product need no explicite proof, for it is quite clear that the product coincide with the logical product of sets represented by the spaces in question. The demonstration of the theor. *4.1* gives at the same time the following corollary:

Theorem 4.2. *For any sequence* $\{a_n\}$ *of spaces we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \overline{\mathop{S}_{n=1}^{\infty} b_n}, \quad \textit{where} \quad b_n = \sum_{i=1}^{n} a_n,$$

and where S *denotes the logical sum of the sets* b_n *of vectors.*

Obviously the infinite sum posesses the property of illimited commutation and assotiation and the same can be stated about the infinite product of spaces.

Theorem 4.3. *If* $a_n \perp b$, $(n=1,2,\ldots)$, *we have* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \perp b$.

Proof. Let $y \in \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. By the *theor. 4.1* there existe a sequence $\{y_n\}$ of vectors such that $y_n \in \sum_{i=1}^{n} a_i$, $y = \lim_n y_n$. The hypothesis $a_n \perp b$, $(n=1,2,\ldots)$ gives *(theor. 2.1)* $\sum_{i=1}^{n} a_i \perp b$ for any n; hence $y_n \perp b$, from which it follows that $y \perp b$. The vector y being an arbitrary vector of the sum, the theorem is proved.

Theorem 4.4. *For any sequence* $\{a_n\}$ *of spaces we have*

$$\mathrm{co} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{co}\, a_n .$$

Proof. Since $a_i \subset \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, then

$$\mathrm{co}\, a_i \supset \mathrm{co} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (i=1,2,\ldots),$$

and therefore, by the definition of the infinite product

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{co}\, a_i \supset \mathrm{co} \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

To show the converse inclusion let us take $x \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{co}\, a_n$. We have $x \in \mathrm{co}\, a_n$, $(n=1,2,...)$, which gives $x \perp a_n$. Consequently $x \perp \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (see *theor. 4.3*); therefore $x \in \mathrm{co} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Thus we have obtained the inclusion

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{co}\, a_n \subset \mathrm{co} \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

which combined with (1) completes the proof.

Theorem 4.5. *The equation* $\mathrm{co} \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{co}\, a_n$ *holds for any sequence* $\{a_n\}$ *of spaces.*

Proof. Putting $b_n \overline{\overline{\mathrm{df}}}\, \mathrm{co}\, a_n$, we have from the former theorem

$$\mathrm{co} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{co}\, b_n.$$

Taking here the complementary, we find at once the required equation.

Two important auxiliary theorems to be need in the sequel are the following ones:

Theorem 4.6. *If* a_i, b_k $(i,k=1,2,...)$, *belong to a field* $\mathbf{S}$, *then*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i \cdot b_k.$$

Proof. Take $a'_n \overline{\overline{\mathrm{df}}} \sum_{i=1}^{n} a_i$, $b'_m \overline{\overline{\mathrm{df}}} \sum_{k=1}^{m} b_k$ $(n,m=1,2,...)$.

Denoting by $\boldsymbol{S}$ the ordinary logical summation of vector-sets, we have in view of *theor. 4.2*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \overline{\mathop{\boldsymbol{S}}_{n=1}^{\infty} a'_n}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \overline{\mathop{\boldsymbol{S}}_{m=1}^{\infty} b'_m}.$$

It follows from them, by account of identity of the logical and our special multiplication of spaces:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \overline{\mathop{\boldsymbol{S}}_{n=1}^{\infty} a'_n \cdot \mathop{\boldsymbol{S}}_{m=1}^{\infty} b'_m} = \overline{\mathop{\boldsymbol{S}}_{n,m=1}^{\infty} a'_n \cdot b'_m}.$$

But

$$\mathop{S}_{n,m=1}^{\infty} a'_n \cdot b'_m = \mathop{S}_{s=1}^{\infty} \mathop{S}_{p=1}^{s} \mathop{S}_{q=1}^{s} a'_p \cdot b'_q$$

$$= \mathop{S}_{s=1}^{\infty} (\mathop{S}_{p=1}^{s} a'_p) \cdot (\mathop{S}_{q=1}^{s} b'_q)$$

$$= \mathop{S}_{s=1}^{\infty} a'_s \cdot b'_s,$$

since $a'_1 \subset a'_2 \subset \ldots$, $b'_1 \subset b'_2 \subset \ldots$

Hence

$$\mathop{S}_{n,m=1}^{\infty} a'_n \cdot b'_m = \mathop{S}_{s=1}^{\infty} (\sum_{p=1}^{s} a_p \cdot \sum_{q=1}^{s} b_q \cdot).$$

Now using the hypothesis that a_p, b_q are spaces of the field, we have, by *theor. 3.4*:

$$\sum_{p=1}^{s} a_p \cdot \sum_{q=1}^{s} b_q = \sum_{p,q=1}^{s} a_p \cdot b_q .$$

Hence

$$\mathop{S}_{n,m=1}^{\infty} a'_n \cdot b'_m = \mathop{S}_{s=1}^{\infty} \sum_{p,q=1}^{s} a_p \cdot b_q,$$

and therefore from (1) we get, using the *theor. 4.2*,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \overline{\mathop{S}_{s=1}^{\infty} \sum_{p,q=1}^{s} a_p \cdot b_q} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p,q=1}^{s} a_p \cdot b_q .$$

The infinite summation being associative and commutative, we get finally:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i \cdot b_k .$$

It may be noticed that the law of distributivity

$$b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b a_n$$

is but a particular case of the theorem just established.

Theorem 4.7. *If* a_i, b_k $(i,k=1,2,\ldots)$ *are spaces of a field* S, *then*

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i + \prod_{k=1}^{\infty} b_k = \prod_{i,k=1}^{\infty} (a_i + b_k).$$

Proof. Putting $a'_i \underset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{co}\, a_i$, $b'_k \underset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{co}\, b_k$ and applying the preceding theorem, we get:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a'_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b'_k = \sum_{i,k=1}^{\infty} a'_i \cdot b'_k,$$

because $a'_i, b'_k \in S$. By means of the laws of DE MORGAN we can write it *(theor. 4.4, 2.4)*:

$$\mathrm{co} \prod_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \mathrm{co} \prod_{k=1}^{\infty} b_k = \mathrm{co} \prod_{i,k=1}^{\infty} (a_i + b_k),$$

which gives, by taking the complementary on both sides, the required identity.

§ 5. **Perfect field of spaces.** The field of spaces constitutes a realisation of the abstract BOOLE'an field and is analogous to an additive class of abstract sets. Now we shall define the analogon of a perfect additive class of sets, as it is considered in the general theory of measure. We obtain thus a realisation of the abstract complet Boole'an field.

Definition 5.1. We shall call *perfect field of spaces* every not empty class K of subspaces (of the given HILBERT-space I), having the following properties:

1^0 if $a \in K$, then $\mathrm{co}\, a \in K$;

2^0 if $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ are spaces belonging to K, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in K$, (condition of *perfect additivity*);

3^0 if $a, b \in K$, $a \cdot b = 0$, then $a \perp b$.

We see immediately that every perfect field is also an ordinary field. This definition admitted, we put our principal problem as follows:

Given any field S, is it possible to find a perfect field K such that S is contained in K.

The problem is much more complicated, than the analogous problem for sets, just owing to the condition 3^0, which causes some difficulty. Notwithstanding the answer, as we shall see, is positif. Having done a field S, we shall find K by successive construction of more and more amplious fields and by means of the transfinite induction. But first we shall prove some auxiliary theorems and, for this sake, we shall introduce some auxiliary notations.

Definition 5.2. We agree to say, that a space *a is of the type* Σ, resp. Π, if there exist spaces $a_n \in S$, such that $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, resp. $= \prod_{n=1}^{\infty} a_n$. In a similar manner we call a *a space of the type* $\Sigma\Pi$, resp. $\Pi\Sigma$, if there exists spaces $a_{i,k} \in S$, such that $a = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$, resp. $a = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$.

We shall speak the space a is *of ambiguous type*, if it is simultaneously of the type $\Sigma\Pi$ and $\Pi\Sigma$.

This definition admitted, the theorem *4.6* states that the product of two spaces Σ is also a space of the type Σ. The theor. *4.7* says that the sum of two spaces Π is also a space of the type Π. The above may be written in the following symbolic manner:

$$\Sigma \cdot \Sigma \subset \Sigma, \qquad \Pi + \Pi \subset \Pi.$$

Theorem 5.1. *If a and b are both of the type $\Sigma\Pi$, their product $a \cdot b$ is also of the same type $\Sigma\Pi$, i. e. $\Sigma\Pi \cdot \Sigma\Pi \subset \Sigma\Pi$.*

Proof. Given two spaces

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} a_{i,k}, \qquad b = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} b_{i,k},$$

where $a_{i,k}, b_{i,k} \in S$, $(i, k = 1, 2, \ldots)$, let us put

$$c_i \underset{\text{df}}{=} \prod_{k=1}^{\infty} a_{i,k}, \qquad d_i \underset{\text{df}}{=} \prod_{k=1}^{\infty} b_{i,k},$$

$$c'_n \underset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i, \qquad d'_n \underset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

On account of the *theor. 4.2* we have:

$$a \cdot b = \overline{\mathop{S}_{n=1}^{\infty} c'_n} \cdot \overline{\mathop{S}_{m=1}^{\infty} d'_m} = \overline{\mathop{S}_{p=1}^{\infty} \Big(\mathop{S}_{i=1}^{p} c'_i \cdot \mathop{S}_{k=1}^{p} d'_k\Big)},$$

(1) $$a \cdot b = \overline{\mathop{S}_{p=1}^{\infty} c'_p \cdot d'_p} = \sum_{p=1}^{\infty} c'_p \cdot d'_p.$$

We have

$$c'_p \cdot d'_p = (c_1 + \ldots + c_p)(d_1 + \ldots + d_p),$$

and then, the spaces c_i, d_k being of the type Π, both factors on the right are also, by *theor. 4.7*, of the same type Π. It follows that $c'_p \cdot d'_p$ is of the type Π, and consequently, by (1), the space $a \cdot b$ is $\Sigma\Pi$. The theorem is thus proved.

By taking the complementary we obtain from the above the following

Theorem 5.2. *If a and b are spaces of the type $\Pi\Sigma$, their sum $a+b$ is also of the same type $\Pi\Sigma$:*

$$\Pi\Sigma+\Pi\Sigma\subset\Pi\Sigma.$$

We state also the following theorem, whose proof is immediate:

Theorem 5.3.
$$\Sigma\Pi+\Sigma\Pi\subset\Sigma\Pi,$$
$$\Pi\Sigma\cdot\Pi\Sigma\subset\Pi\Sigma.$$

Theorem 5.4. *If S is a field of spaces, the set S' of all spaces derived from S and of the ambiguous type, is also a field. S' includes S.*

Proof. Each $a\in S$ can be written in the form

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}a=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a,$$

and thus $S\subset S'$.

To prove that S' is a field we shall verify that all the conditions 1⁰, 2⁰, 3⁰ of the *definition 3.1* are fulfilled.

If $a\in S'$, then a is $\Sigma\Pi$ and therefore, by the *theorems 4.4, 4.5*, co$a$ is $\Pi\Sigma$. Since a is also $\Pi\Sigma$, then co$a$ is $\Sigma\Pi$. The space co$a$ is thus ambiguous and, consequently, it belongs to S'. The condition 1⁰ is thus satisfied.

Given any two spaces $a,b\in S'$, they are both $\Pi\Sigma$, and therefore, by the *theor. 5.3* $a\cdot b$ is also $\Pi\Sigma$. The spaces a,b are also $\Sigma\Pi$, hence, on account of the *theor. 5.1* $a\cdot b$ is also $\Sigma\Pi$. Thus $a\cdot b\in S'$, which gives the condition 2⁰.

It remains only to prove that given any two disjoint spaces a,b of S', they are orthogonal. Let us give two spaces

$$a=\sum_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}a_{l,k},\qquad b=\sum_{l=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}b_{l,k},$$

where $a_{l,k},b_{l,k}\in S$ and suppose that $a\cdot b=0$. To prove the orthogonality of a and b, it suffice to prove, in a general manner, the following proposition:

(1) „Given two spaces $p=\prod_{i=1}^{\infty}p_i$, $q=\prod_{k=1}^{\infty}q_k$, where $p_i,q_k\in S$, the relation $p\cdot q=0$ implies $p\perp q$". In fact, suppose it done.

Since $\prod_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \subset a$, $\prod_{k=1}^{\infty} b_{j,k} \subset b$, the relation $a \cdot b = 0$ implies $\prod_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} b_{j,k} = 0$. On account of the hypothesis we can conclude that $\prod_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \perp \prod_{k=1}^{\infty} b_{j,k}$ $(i,j=1,2,\ldots)$. Applying the *theor. 4.3* we deduce $a \perp \prod_{k=1}^{\infty} b_{j,k}$ $(j=1,2,\ldots)$, which gives, by means of the same theorem, $a \perp b$.

Thus we proceed to the demonstration of the proposition (1). Put

$$a_n \underset{\mathrm{df}}{=} \prod_{i=1}^{n} p_i, \qquad b_m \underset{\mathrm{df}}{=} \prod_{k=1}^{m} q_k.$$

We have $a_1 \supset a_2 \supset \ldots$, $b_1 \supset b_2 \supset \ldots$ and $p = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$, $q = \prod_{m=1}^{\infty} b_m$.

Let $x \in p$, $y \in q$ we have $x \in a_\alpha$, $y \in b_\gamma \subset b_\beta$, where $\beta \leqslant \gamma$. The spaces p_i, q_k belonging to the field S, we have

$$a_\alpha = a_\alpha \cdot b_\beta + (a_\alpha - b_\beta)$$
$$b_\gamma = b_\gamma \cdot a_\alpha + (b_\gamma - a_\alpha),$$

where $a_\alpha \cdot b_\beta \perp (a_\alpha - b_\beta)$, $b_\gamma \cdot a_\alpha \perp (b_\gamma - a_\alpha)$. Hence

$$\mathrm{Proj}_{a_\alpha} x = \mathrm{Proj}_{a_\alpha \cdot b_\beta} x + \mathrm{Proj}_{a_\alpha - b_\beta} x$$
$$\mathrm{Proj}_{b_\gamma} y = \mathrm{Proj}_{b_\gamma \cdot a_\alpha} y + \mathrm{Proj}_{b_\gamma - a_\alpha} y.$$

It follows for the scalar product:

$$(1) \qquad (\mathrm{Proj}_{a_\alpha} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma} y) = (\mathrm{Proj}_{a_\alpha \cdot b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma \cdot a_\alpha} y) + \\ + (\mathrm{Proj}_{a_\alpha \cdot b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma - a_\alpha} y) + (\mathrm{Proj}_{a_\alpha - b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma \cdot a_\alpha} y) + \\ + (\mathrm{Proj}_{a_\alpha - b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma - a_\alpha} y).$$

But

$$(a_\alpha - b_\beta) \cdot (b_\gamma - a_\alpha) = a_\alpha \cdot \mathrm{co}\, b_\beta \cdot b_\gamma \cdot \mathrm{co}\, a_\alpha = 0,$$

whence $(a_\alpha - b_\beta) \perp (b_\gamma - a_\alpha)$, which gives

$$(2) \qquad (\mathrm{Proj}_{a_\alpha - b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma - a_\alpha} y) = 0.$$

Further we have $(a_\alpha \cdot b_\beta) \perp (b_\gamma - a_\alpha)$; and so

$$(3) \qquad (\mathrm{Proj}_{a_\alpha \cdot b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma - a_\alpha} y) = 0.$$

Finally

$$a_\alpha - b_\beta = a_\alpha \cdot \mathrm{co}\, b_\beta \subset a_\alpha \cdot \mathrm{co}\, b_\gamma \subset \mathrm{co}\, b_\gamma,$$

because $\beta \leqslant \gamma$ implies $b_\beta \supset b_\gamma$ and therefore $\mathrm{co}\, b_\beta \subset \mathrm{co}\, b_\gamma$. Hence $(a_\alpha - b_\beta) \perp b_\gamma$ and consequently $(a_\alpha - b_\beta) \perp b_\gamma \cdot a_\alpha$.

Hence

$$(\mathrm{Proj}_{a_\alpha - b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma \cdot a_\alpha} y) = 0. \tag{4}$$

Taking (2), (3), (4) in (1) we obtain:

$$(\mathrm{Proj}_{a_\alpha} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma} y) = (\mathrm{Proj}_{a_\alpha \cdot b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{b_\gamma \cdot a_\alpha} y).$$

Now, having fixed α, let us make $\gamma \to \infty$. Since

$$\lim_\gamma \mathrm{Proj}_{b_\gamma} y = \mathrm{Proj}_q y \quad \text{and} \quad \lim_\gamma \mathrm{Proj}_{b_\gamma \cdot a_\alpha} y = \mathrm{Proj}_{q \cdot a_\alpha} y,$$

we get

$$(\mathrm{Proj}_{a_\alpha} x, y) = (\mathrm{Proj}_{a_\alpha \cdot b_\beta} x, \mathrm{Proj}_{q \cdot a_\alpha} y)$$

which implies

$$\begin{aligned} |(\mathrm{Proj}_{a_\alpha} x, y)| &\leqslant |\mathrm{Proj}_{a_\alpha \cdot b_\beta} x| \cdot |\mathrm{Proj}_{q \cdot a_\alpha} y| \\ &\leqslant |x| \cdot |\mathrm{Proj}_{q \cdot a_\alpha} y|. \end{aligned} \tag{5}$$

Let us take $\alpha \to \infty$. The inequality (5) becomes

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |\mathrm{Proj}_{q \cdot p} y|.$$

Since, in view of the hypothesis, we have $p \cdot q = 0$, we have $|\mathrm{Proj}_{q \cdot p} y| = 0$, and then $(x, y) = 0$, which gives $x \perp y$. The theorem is thus established.

The ambiguous spaces forming a field we can apply to them all the ordinary rules, analogous to the rules of the algebra of sets.

Remark. By means of the *theor. 5.4* it is easy to prove the following theorem: S being a field, the set S'' of all the spaces $a_1 \cdot \mathrm{co}\, b_1 + \ldots + a_n \cdot \mathrm{co}\, b_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ where a_i, b_i are of the type Σ is also a field. Evidently $S \subset S'' \subset S'$.

Theorem 5.5. *If $S_1, S_2, \ldots, S_\omega, \ldots, S_\alpha, \ldots$ is any well ordered set of fields such that each of them is included in the following ones, then the logical sum of all S_α is also a field.*

The proof is immediate.

All this being established, we proceed to the proof of the main theorem:

Theorem 5.6. *Given any field S of spaces there exist always a perfect field B which includes S.*

Proof. We start from the given field $S_1 = S$ and define the well ordered set $S_1, S_2, \ldots, S_\omega, \ldots, S_\alpha, \ldots$ in the following inductive manner. Admitting already defined all the fields S_β, where $\beta < \alpha$, we consider two cases. If α has no immediate predecessor we put S_α identical with the logical sum of all the S_β. If α has an immediate predecessor $\alpha - 1$, we define S_α as the class of all the spaces a, each of which is expressible in the form

$$a = \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} a_{l,k} = \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a'_{l,k},$$

where $a_{l,k}, a'_{l,k} \in S_{\alpha-1}$.

The *theorems 5.4, 5.5* assure that all the S_α are fields. It is clear that the relation $\alpha < \beta$ implies $S_\alpha \subset S_\beta$.

If Ω is the smallest transfinite ordinal number of the power $\aleph_1$, the logical sum of all the S_α, where $\alpha < \Omega$, gives a field B.

We shall prove that B is a perfect field. Given any sequence $\{a_n\}$ of spaces belonging to B, there existe ordinal numbers $\{\alpha_n\}$, for which $a_n \in S_{\alpha_n}$. Putting $\beta \underset{\mathrm{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, we have $a_n \in S_\beta$, for $S_\alpha \subset S_\beta$. The sum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ belonging to $S_{\beta+1}$, we conclude at once, that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in B$. The theorem is thus established.

Having a field S, consider the class Γ of all perfect fields including S. As it may be easy shown, the common part of all these fields Γ is also a perfect field including S. That common part is identical with the perfect field B constructed in the proof of the preceding theorem. It is the smallest perfect field including S. By analogy with borelian sets we put the following definition:

Definition 5.3. The smallest perfect field including the given field S is called the BOREL'an *extension of* S. By *theor. 5.6* this extension exist always.

Definition 5.4. If A is any not empty class of closed subspaces of the given HILBERT space 1, we define $\sum_{a \in A} a$ as the smallest closed space including each a belonging to A. By the product $\prod_{a \in A} a$ we mean the largest closed space included in every a belonging to A.

We see at ones that the above definition generalize the previous notions of finite and infinite sum resp. product of spaces. It is easy to see, that the sum resp. product, if it exist, is well determined. In order to prove the existence of the product $\prod_{a \in A} a$, consider the set b of all the vectors x, where $x \in a$, whenever $a \in A$. The set b is a subspace of 1. We have indeed, if $x, y \in b$, $a \in A$:

$$x, y \in a, \quad \text{and therefore} \quad \lambda x + \mu y \in a$$

for any complex numbers λ, μ. The set b is closed, because, if $x_n \in b$, $x_n \to x$, we have $x_n \in a$ for any $a \in A$ and hence $x \in a$.. Thus b is a closed space included in every a. Suppose b' to be a closed space, which is included in every a. Each vector y of b' belonging to every a, belongs also to b. It follows, that $b' \subset b$. Thus we have shown that $b = \prod_{a \in A} a$, and therefore the existence of the general product is established. To prove the existence of the sum, consider the class B of all the closed subspaces b of 1, each of which includes every $a \in A$. Such a space does exist, for 1 satisfies the above condition. Take the general product $c \overline{\overline{\text{df}}} \prod_{b \in B} b$. We shall prove that c is the required sum. Let $a \in A$. Since $a \subset b \in B$ for any b, it follows that $a \subset \prod_{b \in B} b$ i. e. $a \subset c$. Now suppose that the closed space c' includes every $a \in A$. Then c' belongs to the class B; hence $c \subset c'$. The existence of the general sum is thus established.

Theorem 5.7. *If 1 is a separable Hilbert-space and B a perfect field of closed subspaces of 1, then given any not empty subclass M of B, the spaces*

$$\sum_{a \in M} a, \qquad \prod_{a \in M} a$$

do belong to B.

Proof. Suppose all elements of M be well ordered:

$$a_1, a_2, \ldots, a_\omega, \ldots, a_\alpha, \ldots$$

We derive from this sequence an another transfinite sequence by the definition:

$b_\alpha \underset{\mathrm{df}}{=} \sum\limits_{\beta<\alpha} a_\beta$, conformingly to the *def. 5.4.* Evidently the inequality $\alpha'<\alpha''$ implies $b_{\alpha'} \subset b_{\alpha''}$. We construct an another transfinite sequence by the following inductive definition:

We put $c_1 \underset{\mathrm{df}}{=} b_1$. Suppose defined all c_β, for $\beta<\alpha$. Then we define c_α as to be equal to b_γ, where γ is the smallest ordinal number for which $b_\gamma \supset \sum\limits_{\beta<\alpha} c_\beta$, $b_\gamma \neq \sum\limits_{\beta<\alpha} c_\beta$, n. b. if such a number exist. If not, the process do finish. We see at once that, if $\alpha'<\alpha''$, we have $c_{\alpha'} \subset c_{\alpha''}$, $c_{\alpha'} \neq c_{\alpha''}$. Clearly $\sum\limits_\alpha c_\alpha = \sum\limits_{a \in M} a$. If $\alpha'<\alpha''<\alpha'''$ the spaces $c_{\alpha''} - c_{\alpha'}$, $c_{\alpha'''} - c_{\alpha''}$ are orthogonal and both different from 0.

From the above it follows that the transfinite sequence $c_1, c_2, \ldots, c_\omega, \ldots, c_\alpha, \ldots$ must finish for an index $<\Omega$, for, if not, there will be an not denombrable set of mutually orthogonal spaces different from 0, which is impossible on account of the separability of the HILBERT-space. Thus $\sum\limits_\alpha c_\alpha$ is a sum containing at most an enumerable number of terms. Consequently that sum, i. e. $\sum\limits_{a \in M} a$ belongs to B.

An analogous reasoning may be used to prove that $\prod\limits_{a \in M} a \in B$.

EINIGE SÄTZE ÜBER DIE EXTENSOREN

Von AKITSUGU KAWAGUCHI, Sapporo, Japan

Es ist wohlbekannt, dass eine skalare Funktion $\Phi(v^i_{[\lambda]}, w^{[\mu]}_j)$ von Komponenten beliebiger kontravarianter und kovarianter Vektoren $v^i_{[\lambda]}, w^{[\mu]}_j$ $(\lambda=1,2,\ldots,H;\ \mu=1,2,\ldots,L)$ im N-dimensionalen Raume als eine Funktion $\Psi(\varrho^\mu_\lambda, \sigma^{\mu_1\ldots\mu_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}, \tau^{\mu_1\ldots\mu_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N})$ nur ihrer Skalarprodukte $\varrho^\mu_\lambda = v^i_{[\lambda]} w^{[\mu]}_i$ und, im Falle $H>N$ bzw. $L>N$, von den Verhältnissen $\sigma^{\mu_1\ldots\mu_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}$ bzw. $\tau^{\mu_1\ldots\mu_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}$ der Determinanten von der Gestalt $|v^i_{[\lambda_1]}\ldots v^i_{[\lambda_N]}|$ bzw. $|w^{[\mu_1]}_i \ldots w^{[\mu_N]}_i|$ dargestellt werden muss, wenn die funktionale Form der Funktion Φ unter jeder regulären Punkttransformation von der Klasse ω im Raume $x^i = x^i(x^r)$ unverändert bleibt, d. h.

$$\Phi(v^i_{[\lambda]}, w^{[\mu]}_j) = \Phi(v^r_{[\lambda]}, w^{[\mu]}_s),$$

wie auch die Vektoren $v^i_{[\lambda]}, w^{[\mu]}_j$ gewählt werden mögen.

Das Hauptziel dieser kleinen Arbeit ist, den oben erwähnten Satz auf den Fall der Extensoren zu verallgemeinern.

1. Unter dem Extensor [1]) verstehen wir den Tensor in bezug auf die erweiterte reguläre Punkttransformation längs einer Kurve $x^i = x^i(t)$:

$$\begin{aligned}
&x^i = x^i(x^r),\\
&x'^i = X^i_r x'^r,\\
(1)\qquad &x'^{(1)i} = X^{(1)i}_{(1)r} x'^{(1)r} + X^{(1)i}_{(0)r} x'^r,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&x'^{(M)i} = X^{(M)i}_{(\alpha)r} x'^{(\alpha)r}, \qquad\qquad \alpha = 0,1,2,\ldots,M,
\end{aligned}$$

[1]) Der Name „Extensor“ ist zuerst von H. V. Craig eingeführt worden. H. V. Craig, *On tensors relative to the extended point transformation*. American Journal of Mathematics 59 (1937), 764-774.

wobei wir einfachheitshalber setzen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x'^i &= \frac{dx^i}{dt}, & x'^{(\alpha)i} &= \frac{d^\alpha x'^i}{dt^\alpha} = \frac{d^{\alpha+1} x^i}{dt^{\alpha+1}}, \\ X^i_r &= \frac{\partial x^i}{\partial x^r}, & X^{(\beta)i}_{(\alpha)r} &= \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial x^{(\alpha)i}}. \end{aligned}$$

Mithin transformieren sich zum Beispiel die Komponenten des gemischten Extensors $T_{i\cdot\beta k}^{\cdot\alpha j}$ dritter Stufe von Ordnung M, der exkontravariant einer Stufe, exkovariant einer Stufe und kovariant einer Stufe ist, bei der erweiterten regulären Punkttransformation folgendermassen:

$$T_{i\cdot\beta k}^{\cdot\alpha j} = T_{r\cdot\delta t}^{\cdot\gamma s} X^r_i X^{(\alpha)j}_{(\gamma)s} X^{(\delta)t}_{(\beta)k}.$$

Aus den Grössen $X^{(\alpha)r}_{(\beta)i}$ ergeben sich die Beziehungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} X^{(\alpha)r}_{(\beta)i} &= \binom{\alpha}{\beta} X_i^{r(\alpha-\beta)} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\frac{d^{\alpha-\beta} X^r_i}{dt^{\alpha-\beta}} && \text{für } \alpha>\beta \\ &= X^r_i && \text{für } \alpha=\beta \\ &= 0 && \text{für } \alpha<\beta, \end{aligned}$$

und für das Produkt der zwei Punkttransformationen $x^i = x^i(x^r)$, $x^r = x^r(x^u)$ bestehen

$$X^{(\alpha)i}_{(\beta)r} X^{(\beta)r}_{(\gamma)u} = X^{(\alpha)i}_{(\gamma)u}.$$

Da die Determinante $|X^{(\alpha)i}_{(\beta)r}|$ (—die Indizes α und β laufen über die Werte $0,1,\dots,M$ und gleichzeitig die Indizes i und r über die Werte $1,2,\dots,N$—) den Wert $|X^i_r|^{M+1}$ hat und dieser von Null verschieden ist, so existiert die umgekehrte, erweiterte, reguläre Punkttransformation.

Für einen kontravarianten Vektor v^i und einen kovarianten Vektor w_i haben wir eine und nur eine Art der Überschiebung $\varrho = v^i w_i$. Es ist bemerkenswert, dass dagegen für einen exkontravarianten Extensor erster Stufe von Ordnung M $V^{\alpha i}$ und für einen exkovarianten Extensor erster Stufe von Ordnung M $W_{\beta j}$ nicht eine, sondern $M+1$ Arten der Überschiebungen [1]) vorhanden sind:

$$(4)\qquad \varrho^{[\Lambda]} = \sum_{\beta=\Lambda}^{M} \binom{\beta}{\Lambda} V^{\beta-\Lambda,i} W_{\beta i}.$$

[1]) H. V. Craig, a. a. O. A. Kawaguchi, *Some intrinsic derivations in a generalized space.* Proceedings of the Imperial Academy 12 (1936), 149-151.

2. Zur Vorbereitung wollen wir zuerst einige Sätze[1]) vorführen.

Satz 1. *Die $N(M+1)$ Grössen $V^{\alpha i}$, $\alpha=0,1,\ldots,M$ seien die Komponenten eines exkontravarianten Extensors erster Stufe von Ordnung M, dann sind die $N(K+1)$ Grössen $V^{\alpha i}$, $\alpha=0,1,\ldots,K(\leqq M)$ Komponenten eines exkontravarianten Extensors erster Stufe von Ordnung K.*

Das folgt unmittelbar aus der letzten Beziehung von (3).

Satz 2. *Lassen wir die $N(M+1)$ Grössen $W_{\alpha i}$, $\alpha=0,1,\ldots,M$ die Komponenten eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung M sein, dann bilden die $N(K+1)$ Grössen $\binom{M-K+\Lambda}{\Lambda} W_{M-K+\Lambda,i}$*[2]), *$\Lambda=0,1,\ldots,K(\leqq M)$ die Komponenten eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung K.*

Beweis. Der Satz wird aus der ersten Beziehung von (3) bewiesen. In der Tat kann man sogleich aus den Transformationsgleichungen des Extensors

$$W_{M-K+\alpha,j}=X^{(\beta)r}_{(M-K+\alpha)j}\, W_{\beta r} \tag{5}$$

wegen der letzten Beziehung von (3) ersehen, dass man

$$\beta \geqq M-K+\alpha.$$

setzen darf.

Setzen wir somit

$$\gamma=\beta-(M-K),$$

dann können die Gleichungen (5) folgendermassen umgeschrieben werden:

$$W_{M-K+\alpha,j}=X^{(M-K+\gamma)r}_{(M-K+\alpha)j}\, W_{M-K+\gamma,r},$$

---

[1]) Diese Sätze über den Extensor erster Stufe können leicht zu solchen über den Extensor beliebiger Stufe erweitert werden. Zum Beispiel:

Satz. *Die $N^2(M+1)(M'+1)$ Grössen $U^{\alpha i}_{\cdot\beta j}$, $\alpha=0,1,\ldots,M$; $\beta=0,1,\ldots,M'$ seien die Komponenten eines Extensors zweiter Stufe, exkontravariant erster Stufe von Ordnung M und exkovariant erster Stufe von Ordnung M', dann sind die $N^2(K+1)(K'+1)$ Grössen $\binom{M'-K'+\Gamma}{\Gamma} U^{\alpha i}_{\cdot M'-K'+\Gamma,j}$, $\alpha=0,1,\ldots,K$; $\Gamma=0,1,\ldots,K'$ $(K\leqq M,\ K'\leqq M')$ die Komponenten eines Extensors zweiter Stufe, exkontravariant erster Stufe von Ordnung K und exkovariant erster Stufe von Ordnung K'.*

[2]) Kapitalindizes, welche in einem Glied mehrmals erscheinen, werden nicht summiert.

die nach der ersten Beziehung von (3) in

$$W_{M-K+\Lambda,j}=\frac{(M-K+\gamma)\ldots(\gamma+1)}{(M-K+\Lambda)\ldots(\Lambda+1)}X_{(\Lambda)j}^{(\gamma)r}W_{M-K+\gamma,r}$$

übergehen. Daraus geht hervor

$$\text{(6)}\qquad \frac{(M-K+\Lambda)!}{(M-K)!\Lambda!}W_{M-K+\Lambda,j}=X_{(\Lambda)j}^{(\gamma)r}\frac{(M-K+\gamma)!}{(M-K)!\gamma!}W_{M-K+\gamma,r},$$

was die Richtigkeit des Satzes beweist.

Wegen des Satzes 1 und des Satzes 2 erkennen wir ohne Schwierigkeit, dass die Grössen $\varrho^{[\Lambda]}$ in (4) Skalare sind.

Satz 3. Wenn die $N(M-K)$ Komponenten $V^{\alpha i}$, $\alpha=0,1,\ldots,M-K-1$ eines exkontravarianten Extensors erster Stufe von Ordnung M alle gleich Null sind, so formen die $N(K+1)$ Grössen $\binom{M-K+\Gamma}{\Gamma}^{-1}V^{M-K+\Gamma,i}$, $\Gamma=0,1,\ldots,K$, welche aus den übrigen Komponenten des Extensors gebildet werden, die Komponenten eines exkontravarianten Extensors erster Stufe von Ordnung K.

Beweis. In den Transformationsgleichungen des Extensors

$$\text{(7)}\qquad V^{\alpha i}=X_{(\beta)r}^{(\alpha)i}V^{\beta r},$$

dürfen wir annehmen, dass

$$\beta\geqq M-K,$$

denn die Glieder, in denen die Grössen $V^{\beta r}$, $\beta=0,1,\ldots,M-K-1$ enthalten sind, sind in der rechten Seite wegen der Hypothese des Satzes alle gleich Null. Somit können wir auf Grund der letzten Beziehung von (3) setzen:

$$\alpha\geqq M-K.$$

Setzen wir daher

$$\Gamma=\alpha-(M-K)\qquad\text{und}\qquad\delta=\beta-(M-K),$$

dann sind

$$\begin{aligned}V^{M-K+\Gamma,i}&=X_{(M-K+\delta)r}^{(M-K+\Gamma)i}V^{M-K+\delta,r}\\&=\frac{(M-K+\Gamma)\ldots(\Gamma+1)}{(M-K+\delta)\ldots(\delta+1)}X_{(\delta)r}^{(\Gamma)i}V^{M-K+\delta,r},\end{aligned}$$

d. h.

$$\frac{\Gamma!(M-K)!}{(M-K+\Gamma)!}V^{M-K+\Gamma,i}=X_{(\delta)r}^{(\Gamma)i}\frac{\delta!(M-K)!}{(M-K+\delta)!}V^{M-K+\delta,r}.$$

Die letzten Beziehungen beweisen den Satz.

Satz 4. *Die $N(M-K)$ Komponenten W_{ai}, $a=K+1,\ldots,M$ eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung M seien alle gleich Null, dann sind die übrigen $N(K+1)$ Komponenten W_{ai}, $a=0,1,\ldots,K$ des Extensors die Komponenten eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung K.*

Der Satz folgt aus der letzten Beziehung von (3). In der Tat dürfen wir wegen der Hypothese des Satzes in den Transformationsgleichungen

$$W_{ai}=X^{(\beta)r}_{(\alpha)i}W_{\beta r}$$

so ansehen, dass $\beta\leqq K$. Somit erhalten wir aus (3) auch $a\leqq K$, und die Behauptung des Satzes ist deswegen richtig.

3. Fassen wir die Sätze 1 und 3 bzw. Sätze 2 und 4 zusammen, so lauten sie:

Satz 5. *Wenn die $N(M-K)$ Komponenten V^{ai}, $a=0,1,\ldots,M-K-1$ eines exkontravarianten Extensors erster Stufe von Ordnung M alle gleich Null sind, so bilden die $N(G+1)$ Grössen $\binom{M-K+\Gamma}{\Gamma}^{-1}V^{M-K+\Gamma,i}$, $\Gamma=0,1,\ldots,G(\leqq K)$ die Komponenten eines exkontravarianten Extensors erster Stufe von Ordnung G.*

Satz 6. *Die $N(M-K)$ Komponenten W_{ai}, $a=K+1,\ldots,M$ eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung M seien alle gleich Null, dann sind die $N(G+1)$ Grössen $\binom{K-G+\Lambda}{\Lambda}W_{K-G+\Lambda,i}$, $\Lambda=0,1,\ldots,G(\leqq K)$ die Komponenten eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung G.*

Aus den Sätzen 5 und 6 ergibt sich ohne weiteres

Satz 7. *Es seien V^{al} bzw. $W_{\beta j}$ die Komponenten eines exkontravarianten bzw. eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung M bzw. M' und die $N(M-K)$ bzw. $N(M'-K')$ Komponenten V^{al}, $a=0,1,\ldots,M-K-1$ bzw. $W_{\beta j}$, $\beta=K'+1,\ldots,M'$ alle verschwindend, dann ist*

$$\rho^{|K'-G|}(K,K')=\sum_{a=K'-G}^{K'}\binom{a}{H}V^{a-H,i}W_{ai}\qquad \text{für } M-K\leqq K'-G,$$

(8)

$$\rho^{|M-K|}(K,K')=\sum_{a=M-K}^{M-K+G}\binom{a}{H'}^{-1}V^{ai}W_{a-H',i}\qquad \text{für } M-K\geqq K'-G$$

ein Skalar, wobei G eine beliebige ganze Zahl mit der Beschränkung

$$0 < G \leqq \mathrm{Min}(K, K')$$

ist, und wir setzen

$$H = K + K' - M - G \quad \text{und} \quad H' = M + G - K - K'.$$

Beweis. Aus Satz 5 und 6 erkennen wir sogleich, dass die Grössen $\binom{M-K+\Gamma}{\Gamma}^{-1} V^{M-K+\Gamma, i}$ bzw. $\binom{K'-G+\Gamma}{\Gamma} W_{K'-G+\Gamma j}$, $\Gamma = 0, 1, \ldots, G$ die Komponenten eines exkontravarianten bzw. eines exkovarianten Extensors erster Stufe von Ordnung G sind. Somit ist

$$\sigma = \sum_{\gamma=0}^{G} \binom{M-K+\gamma}{\gamma}^{-1} \binom{K'-G+\gamma}{\gamma} V^{M-K+\gamma, i} W_{K'-G+\gamma, i}$$

ein Skalar. Nun setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma + K' - G \quad &\text{für} \quad M - K \leqq K' - G \\ &= \gamma + M - K \quad &\text{für} \quad M - K \geqq K' - G, \end{aligned}$$

dann ergibt eine leichte Berechnung

$$\begin{aligned} \sigma &= \binom{K'-G}{M-K}^{-1} \varrho^{|K-G|}(K, K') \quad &\text{für} \quad H \geqq 0 \\ &= \binom{M-K}{K'-G} \varrho^{|M-K|}(K, K') \quad &\text{für} \quad H' \geqq 0. \end{aligned}$$

Der Satz ist jetzt bewiesen.

(8) ist eine Erweiterung von (4). Denn, setzen wir

$$K = K' = M, \quad M - G = \Lambda, \quad \alpha = \beta,$$

dann wird der Skalar (8)

$$\varrho^{|\Lambda|}(M, M) = \sum_{\beta=\Lambda}^{M} \binom{\beta}{\Lambda} V^{\beta-\Lambda, i} W_{\beta i},$$

das nichts anderes als (4) ist.

4. Wir wollen jetzt daran gehen, den Hauptsatz zu beweisen. Betrachten wir eine skalare Funktion $\Phi(S^{[\tau]}, V^{\alpha i}_{]\lambda]}, W^{[\mu]}_{\beta j})$ einiger Skalare $S^{[\tau]}$ und einer Zahl von exkontra- und exkovarianten Extensoren erster Stufe von verschiedener Ordnung $V^{\alpha i}_{[\lambda]}, W^{[\mu]}_{\beta j}$, und setzen voraus, dass die Funktion Φ bei jeder erweiterten

regulären Punkttransformation (1) auch in funktionaler Form invariant bleibt, d. h.

$$\Phi(S^{[\varkappa]}, V^{\alpha i}_{[\lambda]}, W^{[\mu]}_{\beta j}) = \Phi(S^{[\varkappa]}, V^{\gamma r}_{[\lambda]}, W^{[\mu]}_{\delta s}), \tag{9}$$

wie auch die Skalare $S^{[\varkappa]}$ und Extensoren $V^{\alpha i}_{[\lambda]}$, $W^{[\mu]}_{\beta j}$ gewählt werden. Wir lassen K die grösste von den Ordnungszahlen M_λ und M_μ der Extensoren $V^{\alpha i}_{[\lambda]}$ und $W^{[\mu]}_{\beta j}$ sein und wählen solche Extensoren $V^{\alpha i}_{[\lambda']}$ und $W^{[\mu']}_{\beta j}$ aus den Extensoren $V^{\alpha i}_{[\lambda]}$ und $W^{[\mu]}_{\beta j}$, dass sie von höchster Ordnung K sind. Wenn die Anzahl der Extensoren $V^{\alpha i}_{[\lambda']}$ grösser als N ist, dann werden die Vektoren $V^{0i}_{[\lambda']}$ [1]) alle durch willkürliche N Vektoren $\widetilde{V}^{0i}_{[\omega]}$, $\omega = 1, 2, \dots, N$ unter den Vektoren $V^{0i}_{[\lambda']}$ linear dargestellt:

$$V^{0i}_{[\lambda']} = \sigma^{\omega}_{\lambda'} \widetilde{V}^{0i}_{[\omega]}, \tag{10}$$

wobei $\sigma^{\omega}_{\lambda'}$ ein Skalar ist und ein Verhältnis zweier Determinanten von der Gestalt

$$\sigma^{\omega}_{\lambda'} = |\widetilde{V}^{0j}_{[1]} \dots \widetilde{V}^{0j}_{[\omega-1]} V^{0j}_{[\lambda']} \widetilde{V}^{0j}_{[\omega+1]} \dots \widetilde{V}^{0j}_{[N]}| / |\widetilde{V}^{0k}_{[1]} \dots \widetilde{V}^{0k}_{[N]}| \tag{11}$$

sein soll. Denn wir dürfen annehmen, dass die N Vektoren $\widetilde{V}^{0i}_{[\omega]}$ linear unabhängig sind, da die Extensoren $V^{\alpha i}_{[\lambda']}$ willkürlich gewählt werden können. Die Komponenten $\overset{*}{V}{}^{0i}_{[\lambda']}$ des Extensors von Ordnung K

$$\overset{*}{V}{}^{\alpha i}_{\lambda'} = V^{\alpha i}_{\lambda']} - \sigma^{\omega}_{\lambda'} \widetilde{V}^{\alpha i}_{[\omega]} \tag{12}$$

sind wegen (10) gleich Null, somit sind die Grössen

$$\overline{V}^{\Gamma i}_{[\lambda']} = \Gamma \overset{*}{V}{}^{\Gamma+1, i}_{[\lambda']} \qquad \Gamma = 0, 1, \dots, K-1 \tag{13}$$

nach Satz 3 die Komponenten eines Extensors von Ordnung $K-1$. Ersetzen wir

$$V^{\Gamma i}_{[\lambda']} = (\Gamma - 1)^{-1} \overline{V}^{\Gamma-1, i}_{[\lambda']} + \sigma^{\omega}_{\lambda'} \widetilde{V}^{\Gamma i}_{[\omega]} \qquad \Gamma = 0, 1, \dots, K \tag{14}$$

in Φ, dann ist die Anzahl der exkontravarianten Extensoren $\widetilde{V}^{\alpha i}_{[\omega]}$ von Ordnung K, welche in Φ enthalten sind, höchstens N. Wenn die Anzahl der Extensoren $W^{[\mu']}_{\beta j}$ von Ordnung K grösser

---

[1]) Aus Satz 1 ersehen wir gleich, dass $V^{0i}_{[\lambda']}$ die Komponenten eines exkontravarianten Extensors erster Stufe von Ordnung Null, d. h. eines gewöhnlichen kontravarianten Vektors sind.

als N ist, dann wählen wir, in ähnlicher Weise wie oben, N linear unabhängige Vektoren $\widetilde{W}^{[\omega]}_{Kj}$ unter den Vektoren $\widetilde{W}^{[\mu']}_{Kj}$ [1]) und stellen dar:

$$W^{[\mu']}_{Kj} = \tau^{\mu'}_{\omega} \widetilde{W}^{[\omega]}_{Kj}, \tag{10'}$$

wobei

$$\tau^{\mu'}_{\omega} = |\widetilde{W}^{[1]}_{Kj} \ldots \widetilde{W}^{[\omega-1]}_{Kj} W^{[\mu']}_{Kj} \widetilde{W}^{[\omega+1]}_{Kj} \ldots \widetilde{W}^{[N]}_{Kj}| / |\widetilde{W}^{[1]}_{Kk} \ldots \widetilde{W}^{[N]}_{Kk}| \tag{11'}$$

ein Skalar ist. Nach Satz 4 sind dann die Grössen

$$\overline{W}^{[\lambda']}_{\beta j} = W^{[\lambda']}_{\beta j} - \tau^{\lambda'}_{\omega} \widetilde{W}^{[\omega]}_{\beta j} \qquad \beta = 0, 1, \ldots, K-1, \tag{13'}$$

die Komponenten eines Extensors von Ordnung $K-1$. Ersetzen wir somit

$$W^{[\lambda']}_{\beta j} = \overline{W}^{[\lambda']}_{\beta j} + \tau^{\lambda'}_{\omega} \widetilde{W}^{[\omega]}_{\beta j}, \qquad \beta = 0, 1, \ldots, K \tag{14'}$$

in Φ, dann ist die Anzahl der exkovarianten Extensoren $\widetilde{W}^{[\omega]}_{\beta j}$ von Ordnung K, welche in Φ enthalten sind, höchstens N. Wie dieses Verfahren zeigt, soll die durch Ersetzung von (14) und (14′) erhaltene Funktion Φ als die Funktion von neuen Argumenten unter jeder erweiterten regulären Punkttransformation (1) in funktionaler Form auch unverändert bleiben, wenn sie sich als die Funktion von alten Argumenten genau so verhält.

Wegen der obenerwähnten Tatsache dürfen wir ohne Schaden der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Funktion Φ die höchstens N exkontravarianten sowie die höchstens N exkovarianten Extensoren $V^{\alpha l}_{[\lambda']}$, $W^{[\mu']}_{\beta j}$ erster Stufe von höchster Ordnung K enthält, während die in Φ enthaltenen Extensoren von niederer Ordnung als K mehr als N sein mögen.

Wenn wir die in (9) umgeschriebene Beziehung

$$\Phi(S^{[\tau]}, V^{\alpha i}_{[\lambda]}, W^{[\mu]}_{\beta j}) = \Phi(S^{[\tau]}, X^{(\gamma)r}_{(\alpha)l} V^{\alpha i}_{[\lambda]}, X^{(\beta)j}_{(\delta)s} W^{[\mu]}_{\beta j})$$

nach X differenzieren, bekommen wir wegen (3)

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial V^{Kr}_{[\lambda']}} V^{0i}_{[\lambda'} - \frac{\partial \Phi}{\partial W^{[\mu']}_{0s}} W^{[\mu']}_{Kj} X^i_s X^j_r, \tag{15}$$

---

[1]) Setzen wird $K=0$ in Satz 2, so kommen wir leicht zu dem Schluß, dass die N Grössen $W^{[\mu']}_{Kj}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ die Komponenten eines Extensors von Ordnung Null, d. h. eines gewöhnlichen Vektors sind.

da die Differentiation der Beziehung $X^{(\delta)r}_{(\beta)i} X^{(\beta)i}_{(\gamma)s} = \delta^\delta_\gamma \delta^r_s$, die für zwei einander umgekehrte, erweiterte, reguläre Punkttransformationen entstehen soll, nach $X^{r(K)}_i$ uns liefert

$$\delta^0_\gamma \delta^\delta_K \delta^t_r X^i_s + X^{(\delta)t}_{(\beta)j} \frac{\partial}{\partial X^{r(K)}_i} X^{(\beta)j}_{(\gamma)s} = 0,$$

damit

$$\frac{\partial}{\partial X^{r(K)}_i} X^{(\beta)j}_{(\gamma)s} = -\delta^0_\gamma X^{(\beta)j}_{(K)r} X^i_s = -\delta^0_\gamma \delta^\beta_K X^j_r X^i_s$$

gelten. (15) führt uns durch Setzung von $X^j_r = \delta^j_r$ zu

$$(16) \qquad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial V^{Kj}_{[\lambda']}} V^{0i}_{[\lambda']} - \frac{\partial \Phi}{\partial W^{[\mu']}_{0i}} W^{[\mu']}_{Kj}.$$

Da die Extensoren $V^{\alpha i}_{[\lambda']}$ bzw. $W^{[\mu']}_{\beta j}$ willkürlich gewählt werden dürfen, kann ohne Schaden der Allgemeinheit angenommen werden, dass die Vektoren $V^{0i}_{[\lambda']}$ bzw. $W^{[\mu']}_{Kj}$ [1]) voneinander linear unabhängig sind und auch die Determinante

$$W = |W^{[\mu']}_{Kj}| \qquad \mu', j = 1, 2, \ldots, L(\leqq N)$$

von Null verschieden ist. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Grössen $\partial\Phi / \partial V^{Kr}_{[\lambda']}$, $r = 1, 2, \ldots, N$ die Komponenten eines kovarianten Vektors sind, und es muß der Vektor wegen (15) durch Vektoren $W^{[\mu']}_{Kj}$ linear ausgedrückt werden:

$$(17) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial V^{Kj}_{[\lambda']}} = A^{\lambda'}_{\mu'} W^{[\mu']}_{Kj}.$$

Wenn das nicht der Fall ist und die Vektoren

$$T^{[\lambda']}_j = \frac{\partial \Phi}{\partial V^{Kj}_{[\lambda']}} - A^{\lambda'}_{\mu'} W^{[\mu']}_{Kj}$$

von den Vektoren $W^{[\mu']}_{Ki}$ linear unabhängig sind, dann gewinnen wir $T^{[\lambda']}_j V^{0i}_{[\lambda']} = 0$, das mit der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $V^{0i}_{[\lambda']}$ im Widerspruch steht. Wir ziehen nun die Skalare

$$(18) \qquad \varrho^{\mu'}_{\lambda'} = V^{\alpha i}_{[\lambda']} W^{[\mu']}_{\alpha i}$$

---

[1]) Die Anzahl der Vektoren $V^{0i}_{[\lambda']}$ bzw. $W^{[\mu']}_{Kj}$ kann gleich oder kleiner als N sein.

in Betracht und sehen diese Beziehungen als ein System von linearen Gleichungen mit Unbekannten $V_{[\lambda']}^{K\mu'}$ an; dann kann man das System wegen $W \neq 0$ in bezug auf diese Unbekannten lösen. Die Lösung besitzt die Form

$$(19) \qquad V_{[\lambda']}^{K\mu'} = \frac{W_{\nu'}^{\mu'}}{W}\left(\varrho_{\lambda'}^{\nu'} - \sum_{i=L+1}^{N} V_{[\lambda']}^{Ki} W_{Ki}^{[\nu']} - \sum_{\beta=0}^{K-1} V_{[\lambda']}^{\beta i} W_{\beta i}^{[\nu']}\right),$$

wobei $W_{\nu'}^{\mu'}$ das algebraische Komplement des Elementes $W_{K\mu'}^{[\nu']}$ in der Determinante W bedeutet. Wir setzen die rechte Seite von (19) an die Stelle von $V_{[\lambda']}^{K\mu'}$ in Φ und stellen die nach dieser Ersetzung abgeleitete Funktion Φ durch Ψ dar; dann entstehen auf Grund von (17) für $j > L$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial V_{[\lambda']}^{Kj}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial V_{[\lambda']}^{K\mu'}} \frac{W_{\nu'}^{\mu'}}{W} W_{Kj}^{[\nu']} + \frac{\partial \Phi}{\partial V_{[\lambda']}^{Kj}}$$
$$= -A_{\varkappa'}^{\lambda'} W_{K\mu'}^{[\varkappa']} \frac{W_{\nu'}^{\mu'}}{W} W_{Kj}^{[\nu']} + \frac{\partial \Phi}{\partial V_{[\lambda']}^{Kj}} = 0,$$

da $W_{K\mu'}^{[\varkappa']} W_{\nu'}^{\mu'} = \delta_{\nu'}^{\varkappa'} W$ ist. Ausserdem folgt aus (16)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial W_{0i}^{[\mu']}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial V_{[\lambda']}^{K\nu'}} V_{[\lambda']}^{0i} \frac{W_{\mu'}^{\nu'}}{W} + \frac{\partial \Phi}{\partial W_{0i}^{[\mu']}}$$
$$= -\frac{\partial \Phi}{\partial W_{0i}^{[\lambda']}} W_{K\nu'}^{[\lambda']} \frac{W_{\mu'}^{\nu'}}{W} + \frac{\partial \Phi}{\partial W_{0i}^{[\mu']}} = 0.$$

Deswegen enthält Ψ wirklich die Argumente $V_{[\lambda']}^{Ki}$ und $W_{0i}^{[\mu']}$ nicht. Das besagt, dass die betreffende Funktion Φ von den Skalaren, in denen die Skalare aus den Formen (11), (11') und (18) enthalten sein mögen, und von den Extensoren von nur niederer Ordnung als K abhängen soll.

Also können wir durch Induktion behaupten [1])

---

[1]) Ein spezieller Fall von Hauptsatz 1 sowie von Hauptsatz 2 ist schon von demselben Verfasser bewiesen worden. A. Kawaguchi, *On the contractions of extensors*. Proceedings of the Imperial Academy 14 (1938), 237-241.

Hauptsatz 1. Es sei eine skalare Funktion $\Phi(V^{\alpha i}_{[\lambda]}, W^{[\mu]}_{\beta j})$ *einer endlichen Zahl der exkontra- und der exkovarianten Extensoren erster Stufe von verschiedener Ordnung* $V^{\alpha i}_{[\lambda]}, W^{[\mu]}_{\beta j}$ *mit der Eigenschaft gegeben, dass sie bei jeder erweiterten regulären Punkttransformation auch in funktionaler Form erhalten bleibt, wie auch die Extensoren gewählt werden; dann muss* Φ *als die Funktion von nur Skalaren von den Formen* (11), (11′) *und* (18) *dargestellt werden.*

Auf ganz analoge Weise kann man beweisen:

Hauptsatz 2. Wenn ein gewöhnlicher Tensor $T(V^{\alpha i}_{[\lambda]}, W^{[\mu]}_{\beta j})$ *einer beliebigen Stufe von den Komponenten einer endlichen Zahl der exkontra- und der exkovarianten Extensoren erster Stufe von verschiedener Ordnung* $V^{\alpha i}_{[\gamma]}, W^{[\mu]}_{\beta j}$ *abhängig ist und bei jeder erweiterten regulären Punkttransformation auch in funktionaler Form unverändert bleibt, wie auch die Extensoren gewählt werden; dann muss* T *von nur Skalaren von den Formen* (11), (11′) *und* (18) *und von einigen gewöhnlichen Vektoren abhängig sein.*

Hauptsatz 1 suggeriert, dass die Skalare, die wir aus Extensoren erster Stufe aufzubauen imstande sind, wesentlich nur von den Arten (11), (11′) und (18), folglich auch (4) sein müssen.

Juli 1938.

SUR QUELQUES POINTS CONCERNANT LA NOTION DU COMITANT

Par St. Gołąb, Kraków

Le but du présent travail est: 1) de préciser dans le domaine de la théorie moderne des objets géométriques la notion bien connue et depuis longtemps employée, notamment la notion du *comitant*, 2) de définir les notions du *comitant propre (pur)* et du *micro-* et *macrocomitant*, 3) de donner deux théorèmes fondamentaux se rapportant à la „pureté" des comitants d'un certain type.

§ 1. Soit donné un espace analytique $\mathfrak{R}$ avec un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ des transformations. Nous dénotons les points variables de l'espace $\mathfrak{R}$ par Ξ, les systèmes „admissibles" des coordonnées par B [1]).

Si au point Ξ_0 et à chaque système B correspond d'une façon univoque une suite (finie ou infinie) de nombres:

$$\Omega^1, \Omega^2, \dots \tag{1}$$

nous disons alors qu'au point Ξ_0 est défini un objet Ω. Les nombres (1) sont appelés les composantes de cet objet par rapport au système B.

L'objet Ω s'appelle un objet géométrique, si la connaissance des composantes dans un certain système des coordonnées B_1 et la connaissance de la transformation, qui conduit de B_1 à un autre système quelconque B_2, permet d'évaluer

---

[1]) Le lecteur qui veut se mettre au courant de la théorie d'objets géométriques soit renvoyé au travail de MM. Schouten et Haantjes, *On the theory of the geometric object.* Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2. Vol. 42 (1937), p. 356-376.

les composantes dans le système B_2. Symboliquement notons cette circonstance comme suit:

(2) $$\Omega_2^{\nu} = f^{\nu}(\Omega_1^{\lambda}; T_{12}),$$

si T_{12} nous symbolise cette transformation qui conduit de B_1 à B_2.

Supposons qu'on a donné une suite des fonctions:

(3) $$F^{\nu}(z^1, z^2, \ldots) \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

de tant de variables indépendantes combien de termes possède la suite (1). Ω étant un objet, le système des équations

(4) $$\Omega^{*\nu} = F^{\nu}(\Omega^1, \Omega^2, \ldots)$$

définit un objet nouveau Ω^*. Comme, notamment, les nombres (1) sont attachés d'une manière univoque au système B et les F^{ν} représentent les fonctions univoques, alors à chaque système B correspondera au moyen de la relation (4) une et une seule suite des composantes $\Omega^{*\nu}$.

Définition 1. *Dans les circonstances énoncées plus haut nous dirons que l'objet Ω^* est un comitant de l'objet Ω.*

Remarque. Si les suites (1) et (3) ont un nombre fini de termes (ce sont justement les cas les plus importants), alors le nombre de termes de la suite (3) est complétement indépendant du nombre de termes de la suite (1).

Définition 2. *L'objet Ω^* sera appelé un comitant propre (ou pur) de l'objet Ω, si Ω^* est un objet géométrique.*

Remarque. Nous verrons plus tard que Ω peut être un objet géométrique sans que le soit son comitant Ω^*. Réciproquement il peut arriver que l'objet Ω n'est pas un objet géométrique tandis que son comitant Ω^* représente un objet géométrique. Voici un exemple: Ω soit un objet non géométrique à une composante, la suite (3) soit composée en même temps d'un seul terme étant une fonction constante. Le comitant Ω^* sera alors, comme un scalaire, un objet géométrique. (Pour obtenir un objet non géométrique à une composante, il suffit de poser $\Omega = \sin \mathfrak{d}$ où $\mathfrak{d}$ est une densité).

§ 2. Nous nous occuperons dans ce paragraphe des objets géométriques à une composante que j'ai appelés les objets de classe Δ [2]). La règle de transformation de la composante des objets de cette classe s'exprime par la formule:

$$\Omega_2 = f(\Omega_1, \Delta_{12}), \tag{5}$$

où Δ_{12} est le jacobien de la transformation T_{12} et Ω_i la composante de l'objet dans le système B_i.

Sous certaines hypothèses de régularité de la fonction $f(x,y)$ j'ai déterminé tous les objets possibles de classe Δ [3]). En rapport avec le problème résolu la question suivante se pose:

Soit Ω une densité non triviale (c.-à-d. ne se réduisant pas identiquement à zéro) de poids (—1), possédant donc la règle suivante de transformation:

$$\Omega_2 = \Omega_1 \cdot \Delta_{12}. \tag{6}$$

Nous définissons ensuite le comitant Ω^* par l'équation:

$$\Omega^* = F(\Omega) \tag{7}$$

et nous demandons: quand Ω^* sera-t-il un comitant propre de la densité Ω.

Nous donnerons la réponse sous l'hypothèse additionnelle que $F(u)$ est une fonction *continue*, en remarquant que la validité du théorème énoncé ci-dessous subsiste si l'on remplace la continuité par une propriété beaucoup plus générale.

Avant d'énoncer le théorème nous remarquons que la fonction $F(u)$ doit être définie pour toutes les valeurs de $u \neq 0$. Cela résulte du fait que dans le pseudogroupe général des transformations qui est admis (toutes les transformations régulières avec le jacobien différent de zéro), la composante de la densité peut atteindre (dans un système de coordonnées convenablement choisi) chaque valeur réelle, différente de zéro.

Nous introduisons encore une brève dénomination. Nous dirons qu'une fonction $F(u)$ qui est définie pour tous les $u \neq 0$ est une α-fonction, si elle est

---

[2]) Cf. St. Gołąb, *Über die Klassifikation der geometrischen Objekte.* Math. Zeitschr. 44 (1938), p. 104-114.

[3]) L. c. [2]).

$$(8)\quad \left|\begin{array}{l}\text{I) reversible dans tout le domaine d'existence,}\\ \text{II) monotone (au sens strict) pour } u>0,\\ \text{III) monotone (au sens strict) pour } u<0.\end{array}\right.$$

Puisque nous avons supposé que notre fonction $F(u)$ est continue pour $u \neq 0$, l'hypothèse que F est une α-fonction équivaut à celle que F est seulement reversible (les propriétés II) et III) sont alors remplies automatiquement).

Théorème. *Si Ω représente une densité ordinaire de poids* (—1), *le comitant Ω^*, défini par l'intermédiaire de la formule* (7), *est un comitant pur de classe Δ, alors et seulement alors quand*

1) *F est une fonction constante aussi bien pour $u>0$ que pour $u<0$, ou bien*

2) *F est une fonction paire et simultanément monotone pour $u>0$, ou bien*

3) *F est une α-fonction.*

Nous démontrerons tout d'abord que les conditions énoncées sont *suffisantes* pour que Ω^* soit un comitant propre.

Si

$$(9)\qquad F(u)=\begin{cases} C_1 & \text{pour} \quad u>0 \\ C_2 & \text{pour} \quad u<0 \end{cases}$$

on conclut alors, que Ω^* est un scalaire ou bien un biscalaire suivant que $C_1=C_2$ ou bien $C_1 \neq C_2$. Tous les deux objets: scalaires et biscalaires [4]) sont des objets géométriques. Dans le cas 2) nous avons

$$(10)\qquad \Omega^*=F(\Omega)=F(|\Omega|).$$

Comme $|\Omega|$ représente une densité de Weyl, donc Ω^*, étant une fonction monotone de $|\Omega|$, est par conséquent un objet géométrique [5]). Supposons enfin que F est une α-fonction et désignons par G la fonction inverse par rapport à F. Nous avons dans ce cas: $\Omega=G(\Omega^*)$. Mais on a $\Omega_2=G(\Omega_2^*)=\Omega_1\cdot\Delta_{12}=\Delta_{12}\cdot G(\Omega_1^*)$, d'où il résulte

$$(11)\qquad \Omega_2^*=F\{\Delta_{12}\cdot G(\Omega_1^*)\}.$$

On voit donc que Ω^* est un objet géométrique.

Il s'agit maintenant de prouver que les conditions énoncées sont *nécessaires*.

---

[4]) L. c. [2]). [5]) L. c. [2]).

Nous supposons alors que Ω^*, défini par (7) est un objet géométrique, ce qui veut dire que subsiste la relation

(12) $$\Omega_2^* = f(\Omega_1^*, \Delta_{12}).$$

De (6), (7) et (12) nous obtenons l'identité

(13) $$F[\Delta \cdot \Omega] \equiv f[F(\Omega), \Delta],$$

vérifiée pour tous les $\Omega \neq 0$ et pour tous les $\Delta \neq 0$. Nous supposons pour le moment que F possède les propriétés II) et III) du numéro (8). Si la propriété I) subsiste simultanément, F est alors une α-fonction. Supposons donc que I) n'est pas vérifiée. Nous démontrerons dans ce cas que F est une fonction paire. La négation de I) nous fournit l'existence de deux valeurs distinctes: $u_1 < u_2$, telles qu'on a

(14) $$F(u_1) = F(u_2).$$

II) et III) du (8) conduisent aux inégalités:

(15) $$u_1 < 0 < u_2.$$

En substituant dans la relation (13) une fois u_1, la deuxième fois u_2 au lieu de Ω et en tenant compte de (14) on parvient à l'identité

(16) $$F(\Delta \cdot u_1) \equiv F(\Delta \cdot u_2) \quad \text{pour tout} \quad \Delta \neq 0.$$

En posant

(17) $$C = u_2 / u_1$$

on obtient la relation

(18) $$F(u) \equiv F(C \cdot u) \quad \text{pour tout} \quad u \neq 0.$$

La substitution de $C \cdot u$ au lieu de u dans la formule précédente donne:

(19) $$F(C \cdot u) \equiv F(C^2 \cdot u) \quad \text{pour tout} \quad u \neq 0,$$

ce qui, confronté avec (18), donne

(20) $$F(u) \equiv F(C^2 \cdot u) \quad \text{pour tout} \quad u \neq 0.$$

De (15) et (17) résulte que $C < 0$ et par conséquent $C^2 > 0$. Comme pour $u > 0$ la fonction F est monotone au sens strict, on obtient nécessairement de (20) $C^2 = 1$, d'où résulte l'égalité:

(21) $$C = -1.$$

(18) et (21) donnent:

$$F(u) \equiv F(-u), \tag{22}$$

ce qui exprime que F est une fonction paire. Notre théorème sera donc démontré si nous prouverons l'implication suivante: si F ne possède pas au moins une des propriétés II), III), alors la relation (9) a lieu.

Nous supposons que la propriété II) ne subsiste pas (la démonstration serait tout à fait analogue dans le cas symétrique où III) ne subsisterait pas). Il existe donc deux nombres u_1, u_2 tels que

$$0 < u_1 < u_2 \tag{23}$$

avec en même temps

$$F(u_1) = F(u_2). \tag{24}$$

L'égalité (24) entraîne l'identité:

$$F(u) \equiv F(C \cdot u) \quad \text{pour tous les} \quad u \neq 0, \tag{25}$$

où nous avons posé:

$$C = u_2/u_1. \tag{26}$$

Nous désignons par Z l'ensemble de tous les nombres positifs C ayant la propriété de satisfaire à la relation (25).

Comme la fonction F est continue pour tout $u > 0$, l'ensemble Z est un ensemble fermé, excepté — peut être — le point $C = 0$. Notre but est de démontrer la relation (9) ou, ce qui revient au même, le fait que Z se compose de tous les nombres positifs. Il suffit pour cela de prouver que Z est partout dense (dans les nombres positifs). Pour atteindre ce but nous démontrerons tout d'abord que Z a la puissance du continu.

Deux cas possibles sont à distinguer:

I) la fonction F est pour $u > 0$ monotone au sens large, ou bien

II) F n'est pas monotone pour $u > 0$.

Dans le cas I) il existe un intervalle de constance de $F(u)$ (F n'est pas monotone au sens strict d'après l'hypothèse!), c.-à-d. il existe deux nombres γ_1 et γ_2 tels que $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ et que simultanément subsiste la relation

$$\gamma_1 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant \gamma_2 \supset F(u_1) = F(u_2). \tag{27}$$

On voit sans peine que dans ce cas tout un voisinage du point 1 appartient à l'ensemble Z. L'ensemble Z a donc certainement la puissance du continu. Passons maintenant au cas II). $F(u)$ étant une fonction continue et non monotone, possède dans ce cas un extremum pour un $u_0>0$ au moins. Supposons, pour fixer les idées, que c'est un maximum et posons $F(u_0)=\eta_0$. Si $F(u)$ était constante au voisinage du point $u=u_0$, alors, en raisonnant comme dans le cas précédent, nous obtiendrions la conclusion que tout un voisinage de 1 est contenu dans Z. Il suffit donc d'envisager le cas où F n'est pas constante au voisinage du point $u=u_0$. Il existe dans ce cas un nombre positif $\varepsilon>0$ tel que l'équation $F(u)=\eta_0-\varepsilon$ a deux racines au moins: une plus petite que u_0, l'autre plus grande que u_0. Désignons ces racines respectivement par $u_0-\delta_1$ et $u_0+\delta_2$ $(\delta_1, \delta_2>0)$. Nous prenons maintenant dans le plan des variables (u, η) le rectangle P, dont les sommets ont les abscisses: $u_0-\delta_1$, $u_0+\delta_2$ et les ordonnées: η_0, $\eta_0-\varepsilon$. Soit ensuite ϱ un nombre quelconque de l'intervalle $(0, \varepsilon)$, et prenons la droite: $\eta=\eta_0-\varrho$. Cette droite coupe la courbe $\eta=F(u)$ à l'intérieur du rectangle P en deux points au moins, ce qui découle de la continuité de F. Soient $u_1(\varrho)$, resp. $u_2(\varrho)$ les abscisses: la plus petite, resp. la plus grande de ces points de rencontre. Remarquons qu'on a l'inégalité $u_1(\varrho)<u_0<u_2(\varrho)$ et posons $s(\varrho)=\dfrac{u_2(\varrho)}{u_1(\varrho)}$. Nous affirmons que $s(\varrho)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$. Il suffit dans ce but de prouver (grâce à ce que $u_1(\varrho)>0$, $u_2(\varrho)>0$) que $u_2(\varrho)$ est croissante tandis que $u_1(\varrho)$ est décroissante. Nous prouverons notre proposition quant à $u_2(\varrho)$ en remarquant seulement que celle se rapportant à $u_1(\varrho)$ résultera d'un raisonnement analogue. Supposons pour un instant qu'il y a dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$ deux valeurs ϱ_1 et ϱ_2 telles que $\varrho_1<\varrho_2$ et qu'en même temps $u_2(\varrho_1)\geqslant u_2(\varrho_2)$. L'égalité $u_2(\varrho_1)=u_2(\varrho_2)$ est impossible, parce qu'elle indiquerait que F est bivalente. Il reste donc l'inégalité $u_2(\varrho_1)>u_2(\varrho_2)$. En appliquant à la fonction F dans l'intervalle $[u_2(\varrho_1), u_0+\delta_2]$ le théorème de la propriété de Darboux, nous obtiendrons une valeur $\tau>u_2(\varrho_1)>u_2(\varrho_2)$ telle que $F(\tau)=\eta_0-\varrho_2$, ce qui exprimerait que $u_2(\varrho_2)$ n'est pas la plus grande racine de l'équation $F(u)=\eta_0-\varrho_2$, située dans l'intervalle $[u_0-\delta_1, u_0+\delta_2]$, contraire-

ment à la définition. Cette contradiction prouve que $u_2(\varrho)$ est croissante. La fonction $s(\varrho)$ est par conséquent croissante. L'ensemble des valeurs de la fonctions $s(\varrho)$ est donc de puissance du continu. Comme toute la valeur de $s(\varrho)$ appartient à Z, on a ainsi démontré que Z est de puissance du continu.

Dans la suite nous nous appuierons sur le lemme suivant.

Lemme. Si un ensemble Z de nombres positifs possède les deux propriétés suivantes:

1) il est de puissance du continu,
2) si a et b appartiennent à Z, alors le quotient a/b y appartient aussi,

alors Z est partout dense dans le corps des nombres positifs.

Démonstration. Désignons par L l'ensemble de tous les nombres dont chacun est un logarithme d'un certain nombre de l'ensemble Z. L'ensemble L est donc aussi de puissance du continu. L possède de plus la propriété suivante:

$$a, b \in L \supset (a-b) \in L. \tag{28}$$

La dérivée $\bar{L}$ de L est aussi de puissance du continu. On voit sans peine que 0 appartient à $\bar{L}$. En effet, il existe au moins un nombre appartenant à $\bar{L}$, soit a_0. A ce nombre correspond une suite $a_n \to a_0 (a_m \neq a_n)$ telle que $a_n \in L$. On a alors selon (28): $(a_m - a_n) \in L$, où $(a_m - a_n) \to 0$ pour $m \to \infty$, $n \to \infty$. Ce qui signifie que $0 \in \bar{L}$. On voit en même temps d'après le raisonnement précédent, que 0 est un point bilatéral d'accumulation. Supposons maintenant qu'il existe un nombre b n'appartenant pas à $\bar{L}$. Admettons $b > 0$. Soit (c, d) l'intervalle le plus étendu contenant b et ne renfermant pas de point de $\bar{L}$. Un des nombres c, d est certainement fini. Supposons que c'est d. On a: $d \in \bar{L}$. Si d est un point d'accumulation à gauche, on trouvera alors un point g à l'intérieur de l'intervalle (b, d) tel que $g \in L$. Si, par contre, d est seulement un point d'accumulation à droite, alors en raison de ce que 0 est un point d'accumulation à droite, on trouvera deux nombres e et f tels que $e \in L$, $f \in L$, $f > 0$, $e > d$, et que $b < e - f < d$. Omettons la démonstration de cette circonstance. On aura donc: $(e-f) \in L$ et par suite l'existence d'un $g \in L$, et remplissant l'inégalité:

$b<g<d$ est démontrée. En prenant une suite c_n de propriétés: $c_n \to 0$, $c_n \neq 0$, $c_n \epsilon L$ nous obtiendrons une suite $g-c_n$ telle que $(g-c_n) \epsilon L$, $g-c_n \neq 0$, $g-c_n \to g$. Cela montre que $g \epsilon \bar{L}$ contrairement à ce que l'intérieur de l'intervalle (b,d) ne renferme pas de points de $\bar{L}$. La contradiction étant évidente, nous avons en même temps démontré que chaque nombre appartient à $\bar{L}$, ce qui veut dire que L est partout dense. L'ensemble Z est par conséquent, aussi partout dense dans le domaine des nombres positifs, c. q. f. d.

L'ensemble Z étant fermé et partout dense, il possède aussi la troisième propriété: il renferme tous les nombres positifs. L'identité (25) a donc lieu pour tous les $C>0$ et pour tous les $u \neq 0$. De là résulte immédiatement que les relations (9) ont lieu. Notre théorème est ainsi démontré.

§ 3. Nous admettons maintenant le cas où un champ d'objets $\Omega^{\nu}(\Xi)$ est donné. Nous allons considérer seulement des champs homogènes, ce qui veut dire, que: 1) le nombre des composantes de Ω est le même dans chaque point Ξ du domaine considéré, 2) la loi de transformation des composantes est pour tous les Ξ la même.

Pour les champs d'objets nous poserons deux définitions du comitant: celle du microcomitant et celle, plus générale, du macrocomitant. Pour éviter toutes les confusions possibles nous déclarons d'avance que la discrimination des dénominations n'a rien de commun avec une discrimination qu'ont introduit MM. SCHOUTEN et HAANTJES (les objets macro- et microgéométriques) [6]. L'unique analogie consiste — peut être — dans l'analogie de l'inclusion logique: chaque microcomitant (objet microgéométrique) est un macrocomitant (un objet macrogéométrique), mais pas réciproquement.

Définition. Soit donné un champ d'objets $\Omega(\Xi)$ (nous écrivons tout court Ω au lieu de Ω^{ν} en ne préjugeant pas le nombre des composantes de l'objet) et soit $\mathcal{F}$ une fonctionnelle (ou une suite de fonctionnelles) dépendant de deux arguments: d'une fonction $\lambda(\Xi)$ (ou bien d'une suite de fonctions dont le nombre

---

[6]) L. c. [1]) p. 365 et 368.

est le même comme le nombre des composantes de l'objet) et du point Ξ de l'espace:

(29) $$\mathcal{F}\{\lambda(\Xi);\, \Xi\}$$ [7]).

Si nous posons maintenant

(30) $$\Omega^*(\Xi) = \mathcal{F}\{\Omega(\Xi);\, \Xi\},$$

alors $\Omega^*(\Xi)$ sera un nouveau champ d'objets. Nous appellerons dans ce cas Ω^* le *macrocomitant* du champ $\Omega(\Xi)$.

Si en particulier dans un certain point Ξ_0 subsiste la relation

(31) $$\mathcal{F}\{\Omega(\Xi_0);\, \Xi_0\} = \mathcal{F}\{\overline{\Omega}(\Xi_0);\, \Xi_0\}$$

chaque fois qu'on a

(32) $$\Omega(\Xi_0) = \overline{\Omega}(\Xi_0)$$

bien que

(33) $$\Omega(\Xi) \neq \overline{\Omega}(\Xi) \quad \text{pour} \quad \Xi \neq \Xi_0,$$

Ω^* sera alors appelé un microcomitant au point Ξ_0. Si Ω^* est un microcomitant dans chaque point Ξ du domaine envisagé, nous l'appellerons tout court *microcomitant*.

On peut donc dire que les composantes d'un microcomitant dépendent dans un point donné Ξ_0 seulement des composantes de l'objet donné Ω dans ce point et ne dépendent pas des composantes Ω dans d'autres points. Le suivant exemple, très simple d'ailleurs, cité ci-dessous, montre qu'il existe des macrocomitants qui ne sont pas des microcomitants.

Soit $\Omega(\Xi)$ un champ scalaire, défini au point Ξ_0 et dans un voisinage de ce point. Désignons par Ω^* le gradient de ce champ. C'est évidemment un macrocomitant de Ω. Il n'en est pas cependant le microcomitant parce que les composantes de Ω^* dépendent non seulement de la valeur de $\Omega(\Xi_0)$, mais aussi des valeurs $\Omega(\Xi)$ au voisinage de Ξ_0.

De la définition précédente il s'ensuit, que les comitants algébriques sont microcomitants tandis que les comitants différentiels sont en général seulement des macrocomitants.

---

[7]) Nous employons exprès un autre caractère $\mathcal{F}$ pour accentuer la différence entre une fonctionnelle dépendant d'une fonction et une fonction composée de deux fonctions.

Pour donner quelques exemples envisageons un espace riemannien V_n. Alors leur tenseur fondamental (métrique) représente un champ d'objets (géométriques). Les symboles de Christoffel (de première et de seconde espèce) sont des macrocomitants purs du tenseur métrique. Aussi le tenseur de courbure. Le tenseur de Ricci est par contre un microcomitant du tenseur de courbure. D'une façon analogue, un champ d'affineurs étant donné, le champ des affineurs obtenus par contraction de deux indices convenables sera un microcomitant du champ donné.

Nous attirons encore l'attention sur le fait suivant. Les paramètres projectifs, introduits par M. T. Y. THOMAS[8]):

$$\Pi^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{1}{n+1}(A^{\nu}_{\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + A^{\nu}_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\alpha}) \tag{34}$$

représentent un comitant pur de l'objet dont les composantes sont les paramètres $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ de la connexion, parce que la loi de transformation des $\Pi^{\nu}_{\lambda\mu}$ est la suivante:

$$\Pi^{k}_{ij} = \Pi^{\nu}_{\lambda\mu} A^{k}_{\nu} A^{\lambda}_{i} A^{\mu}_{j} + A^{k}_{\lambda}\partial_i A^{\lambda}_{j} + \frac{1}{n+1}(A^{k}_{i}\partial_j \log|\Delta| + A^{k}_{j}\partial_i \log|\Delta|) \tag{35}$$

et nous voyons que le deuxième membre dépend seulement de $\Pi^{\nu}_{\lambda\mu}$ et de la transformation: $\xi^{\lambda} \to \xi^{i}$.

D'autre part les paramètres conformes, dus à M. J. M. THOMAS[9]):

$$\Sigma^{\nu}_{\lambda\mu} = \begin{Bmatrix} \nu \\ \lambda\mu \end{Bmatrix} - \frac{1}{n}\left[\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha\lambda \end{Bmatrix} A^{\nu}_{\mu} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha\mu \end{Bmatrix} A^{\nu}_{\lambda} - g^{\nu\alpha} g_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta\alpha \end{Bmatrix}\right] \tag{36}$$

représentent à vrai dire un comitant de $g_{\lambda\mu}$ mais seulement un macrocomitant. De plus, ce comitant n'est pas un comitant pur parce que dans la règle de transformation pour $\Sigma^{\nu}_{\lambda\mu}$:

$$\begin{aligned} \Sigma^{k}_{ij} = \Sigma^{\nu}_{\lambda\mu} A^{k}_{\nu} A^{\lambda}_{i} A^{\mu}_{j} + A^{k}_{\lambda}\partial_i A^{\lambda}_{j} + \frac{1}{n}[A^{k}_{i}\partial_j \log|\Delta| + A^{k}_{j}\partial_j \log|\Delta|] - \\ - g_{ij} g^{kl}\partial_l \log|\Delta| \end{aligned} \tag{37}$$

interviennent dans le deuxième membre les composantes du tenseur métrique et non seulement les $\Sigma^{\nu}_{\lambda\mu}$ et les termes provenant de la transformation: $\xi^{\lambda} \to \xi^{k}$.

---

[8]) Cf. p. ex. Schouten-Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, vol. 2 (1938), p. 193 et 194.

[9]) Cf. p. ex. Schouten-Struik, l. c. [8]) p. 213 et 214.

§ 4. Soit $\mathfrak{v}$ un champ de densités de poids (-1), c. à d. avec la loi de transformation:

$$\overline{\mathfrak{v}}=\mathfrak{v}\cdot\Delta \tag{38}$$

où Δ est le jacobien de la transformation.

En posant

$$\Omega=F(\mathfrak{v}), \tag{39}$$

où $F(u)$ est une fonction définie pour tous les $u\neq 0$, nous obtenons un nouveau champ d'objets à une composante. Le théorème du § 2 a résolu la question quand Ω est un comitant pur.

A l'aide de Ω nous construisons maintenant un comitant nouveau Ω_ν^* en posant dans chaque système admissible des coordonnées ξ^ν:

$$\Omega_\nu^*=\frac{\partial\Omega}{\partial\xi^\nu}=\partial_\nu\Omega. \tag{40}$$

Nous demandons: quand le comitant Ω^* sera-t-il un comitant pur de la densité $\mathfrak{v}$. La réponse à cette question est contenue dans le théorème suivant.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que le comitant* Ω^*, *défini par* (40), *résulte pour chaque champ arbitraire des densités* $\mathfrak{v}$, *comme comitant pur, consiste en ce que la fonction* F *soit de la forme suivante*:

$$F(u)=\Gamma\cdot ln\,|u|, \tag{41}$$

où Γ *est une constante arbitraire.*

Démonstration. Nous prouverons que la condition est nécessaire. Soient deux systèmes arbitraires (admissibles) des coordonnées symbolisés par (λ) et (k) et soit T la transformation qui conduit de (λ) à (k). Comme le comitant Ω^* est, par hypothèse, pur, la relation qui suit subsiste:

$$\Omega_i^*=f_i(\Omega_\nu^*;T). \tag{42}$$

De là résulte en particulier la proposition suivante: Si le champ $\mathfrak{v}$ est remplacé par un autre champ $\overline{\mathfrak{v}}$ de propriété telle que dans un certain système (λ) de coordonnées soit remplie l'identité

$$\overline{\Omega}_\nu^*=\Omega_\nu^*, \tag{43}$$

alors dans chaque autre système (k) doit être satisfaite l'identité:

$$\bar{\Omega}_k^* = \Omega_k^*. \tag{44}$$

En tenant compte du fait constaté ci-dessus, nous désignons par (λ) un système de coordonnées tel qu'on ait identiquement:

$$\underset{(\lambda)}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v} \equiv C \tag{45}$$

où C est une constante (différente de zéro). Il est bien connu qu'un tel système de coordonnées existe pour chaque champ de densités. Dans ce système (λ) nous avons:

$$\Omega_\nu^* = \partial_\nu F(\mathfrak{v}) = F'(\mathfrak{v})\,\partial_\nu \mathfrak{v} \equiv 0. \tag{46}$$

Nous supposons que $\bar{\mathfrak{v}}$ est un autre champ de densités ayant la propriété (43). Comme

$$\bar{\Omega}_\nu^* = \partial_\nu F(\bar{\mathfrak{v}}) = F'(\bar{\mathfrak{v}}) \cdot \partial_\nu \bar{\mathfrak{v}}, \tag{47}$$

nous obtenons, en comparant (46) et (47) d'après (43):

$$F'(\bar{\mathfrak{v}})\,\partial_\nu \bar{\mathfrak{v}} \equiv 0. \tag{48}$$

De là découlent les deux possibilités suivantes. Ou bien nous avons:

$$\partial_\nu \bar{\mathfrak{v}} \equiv 0 \tag{49}$$

ce qui entraîne:

$$\underset{(\nu)}{\bar{\mathfrak{v}}} \equiv D, \qquad D \text{ constant} \tag{50}$$

ou bien on a:

$$F'(\bar{\mathfrak{v}}) \equiv 0. \tag{51}$$

Si dans le dernier cas $\bar{\mathfrak{v}}$ n'était pas constante, la fonction $F(u)$ serait dans un certain intervalle constante et Ω^* se réduirait dans ce cas à un champ trivial identiquement nul. Nous faisons abstraction dans la suite de telles solutions et nous supposons donc l'identité (50). Remarquons que les raisons mentionnées nous garantissent que les deux constantes C et D sont différentes de zéro:

$$C \neq 0, \qquad D \neq 0. \tag{52}$$

Calculons maintenant les composantes Ω_i^* et $\bar{\Omega}_i^*$ dans un système quelconque (k) de coordonnées. Nous avons:

$$\Omega_i^* = \partial_i F(\underset{(k)}{\mathfrak{v}}) = G(\underset{(k)}{\mathfrak{v}}) \cdot \partial_i \underset{(k)}{\mathfrak{v}} = G(C\cdot\Delta)\cdot\partial_i(C\cdot\Delta) = C\cdot G(C\cdot\Delta)\,\partial_i\Delta, \tag{53}$$

où l'on a posé:

$$G(u)=F'(u). \tag{54}$$

D'une façon analogue on obtient:

$$\overline{\Omega}_l^*=D\cdot G(D\cdot\Delta)\partial_l\Delta. \tag{55}$$

La relation (43) nous fournit l'identité suivante:

$$C\cdot G(C\cdot\Delta)\cdot\partial_l\Delta\equiv DG(D\cdot\Delta)\cdot\partial_l\Delta. \tag{56}$$

En tenant compte de l'arbitraire du jacobien Δ on en déduit:

$$C\cdot G(C\cdot\Delta)\equiv D\cdot G(D\cdot\Delta). \tag{57}$$

La fonction $G(u)$ satisfait donc à la suivante équation fonctionnelle:

$$G(u)\equiv v\cdot G(u\cdot v) \quad \text{pour tous les} \quad u,v\neq 0. \tag{58}$$

Cette relation exprime que $G(u)$ est homogène avec l'ordre d'homogénéité (—1). Elle est donc nécessairement—comme il est bien connu — de la forme:

$$G(u)=\omega/u \tag{59}$$

où

$$\omega=\omega_1 \quad \text{pour} \quad u>0, \quad \omega=\omega_2 \quad \text{pour} \quad u<0, \tag{60}$$

ω_1,ω_2 étant deux constantes.

De là nous obtenons par intégration

$$F(u)=\omega\ln|u|. \tag{61}$$

On a donc

$$\Omega=\omega\ln|\mathfrak{v}| \tag{62}$$

et par conséquent

$$\Omega_\nu^*=\partial_\nu\Omega=\frac{\omega}{|\mathfrak{v}|}\cdot\mathrm{sgn}(\mathfrak{v})\cdot\partial_\nu\mathfrak{v}=\frac{\omega}{\mathfrak{v}}\,\partial_\nu\mathfrak{v}. \tag{63}$$

En posant pour plus de brièveté:

$$\underset{(\nu)}{\mathfrak{v}}=\mathfrak{v}, \qquad \underset{(k)}{\mathfrak{v}}=\overline{\mathfrak{v}}=\mathfrak{v}\cdot\Delta \tag{64}$$

nous obtenons dans la suite:

$$\left|\begin{aligned}\Omega_l^*&=\partial_l\overline{\Omega}=\partial_l[\overline{\omega}\ln|\overline{\mathfrak{v}}|]=\frac{\overline{\omega}}{\overline{\mathfrak{v}}}\,\partial_l\overline{\mathfrak{v}}=\frac{\overline{\omega}}{\mathfrak{v}\cdot\Delta}\,\partial_l(\Delta\cdot\mathfrak{v})=\\&=\frac{\overline{\omega}}{\mathfrak{v}}\,\partial_l\mathfrak{v}+\frac{\overline{\omega}}{\Delta}\,\partial_l\Delta=\frac{\overline{\omega}}{\mathfrak{v}}\,A_l^\nu\partial_\nu\mathfrak{v}+\frac{\overline{\omega}}{\Delta}\,\partial_l\Delta=\\&=A_l^\nu\frac{\omega}{\mathfrak{v}}\,\partial_\nu\mathfrak{v}\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)+\frac{\overline{\omega}}{\Delta}\,\partial_l\Delta=\frac{\overline{\omega}}{\omega}\,A_l^\nu\Omega_\nu^*+\frac{\overline{\omega}}{\Delta}\,\partial_l\Delta,\end{aligned}\right. \tag{65}$$

où $\overline{\omega}=\omega_1$ resp. $\overline{\omega}=\omega_2$ suivant que $\overline{\mathfrak{v}}>0$ resp. $\overline{\mathfrak{v}}<0$ ou $\mathfrak{v}\cdot\Delta>0$ resp. $\mathfrak{v}\cdot\Delta<0$. On peut donc transcrire la dernière relation:

$$\Omega_l^* = \frac{\overline{\omega}}{\omega}\cdot A_l^{\nu}\Omega_\nu^* + \overline{\omega}\,\partial_l \log|\Delta|. \tag{66}$$

Comme les valeurs des constantes $\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}$ et $\overline{\omega}$ dans le cas $\omega_1 \neq \omega_2$ dépendraient non seulement de Δ, mais aussi du signe de $\mathfrak{v}$, tandis que les Ω_ν^* sont absolument indépendantes du signe de $\mathfrak{v}$, on conclut d'après la définition d'un objet géométrique que l'égalité

$$\omega_1 = \omega_2 \tag{67}$$

doit être satisfaite. En désignant par Γ la valeur commune des constantes ω_1, ω_2 on parvient à la loi suivante pour les transformations des composantes de Ω^*:

$$\Omega_l^* = A_l^{\nu}\Omega_\nu^* + \Gamma\,\partial_l \log|\Delta|. \tag{68}$$

La nécessité de la condition est donc prouvée. Pour démontrer maintenant que la condition est aussi suffisante, il suffit de montrer que la loi (68) définit un objet géométrique. Cette chose peut être facilement vérifié par le lecteur.

Remarquons que la plupart des auteurs écrivent $\partial_i \log\Delta$ au lieu de $\partial_l\Delta/\Delta$, ce qui est évidemment incorrect si l'on opère dans le groupe des transformations dont le jacobien peut posséder le signe arbitraire.

Dans le cas particulier $\Gamma=-1$ nous obtenons la règle bien connue de la transformation de l'objet qui est un comitant de l'objet de la connexion affine. Si nous faisons notamment la contraction des indices dans les paramètres de la connexion:

$$\Gamma_\nu = \Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} \tag{69}$$

nous obtenons ainsi un (micro-) comitant pur avec la loi de transformation:

$$\Gamma_i = A_l^{\nu}\Gamma_\nu - \partial_l \log|\Delta|. \tag{70}$$

La question suivante se pose donc: Pour quelles connexions l'objet Γ_l résulte-t-il comme gradient du logarithme d'une densité de Weyl de poids $(+1)$ (parce que $\Omega=-\log|\mathfrak{v}|=\log\dfrac{1}{|\mathfrak{v}|}$

et $\frac{1}{|\mathfrak{v}|}$ représente une densité de Weyl de poids $(+1)$). Cette condition impose une restriction pour les paramètres de la connexion. En effet, comme l'identité suivante

(71) $$\Gamma_\nu = \partial_\nu \log \frac{1}{|\mathfrak{v}|}$$

doit être satisfaite, on obtient les conditions de l'intégrabilité

(72) $$\partial_\nu \Gamma_\lambda - \partial_\lambda \Gamma_\nu = 0,$$

ce qui est équivalent à la condition:

(73) $$V_{\lambda\nu} = R_{\lambda\nu\mu}^{\cdots\mu} = 0.$$

La connexion doit être dans ce cas „inhaltstreu" d'après la terminologie de M. SCHOUTEN [10]). Dans les espaces de ce genre existent alors des champs de densités $\mathfrak{v}$, satisfaisant à (71) et déterminés—comme on peut l'établir—à un facteur constant près. Vu que ces densités particulières existent, on peut dans ces espaces introduire la notion de la mesure n-dimensionnelle, ce qui a été remarqué pour la première fois par M. VEBLEN [11]).

---

[10]) Cf. Schouten-Struik, vol. I (1935), p. 112.

[11]) O. Veblen, Equiaffine geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. 9 (1923), p. 3-4.

SUR L'ÉQUIVALENCE DES POLYÈDRES, EN PARTICULIER DES POLYÈDRES RÉGULIERS, ET SUR LA DISSECTION DES POLYÈDRES RÉGULIERS EN POLYÈDRES RÉGULIERS

Conférence faite à la Section cracovienne de la Société Polonaise de Mathématique le 1-er Juin 1938[1])

Par M. Henri Lebesgue, Paris

J'ai choisi ce sujet de conférence parce qu'il est intimement lié aux questions de mesures des grandeurs, dont je me suis occupé toute ma vie; mais aussi parce qu'il y s'agira de polyèdres, ces corps si peu étudiés par les mathématiciens. A peu près seuls les ont considérés ceux qui se sont occupés de cristallographie; et puisque votre Président et Doyen, M. Zaremba, est l'un de ces rares mathématiciens, ce sujet me donne la joie de lui adresser ici mon hommage.

1. Pendant longtemps le nombre attaché à une collection, une longueur, l'aire d'un domaine, le volume d'un corps ont été considérés comme des notions premières dont l'examen critique était du ressort de la métaphysique; les mathématiciens, eux, devaient se borner à évaluer ces nombres, ces longueurs, ces aires et ces volumes; c'est-à-dire essentiellement à décider de leur égalité ou de leur inégalité, et, dans ce second cas, à les classer en plus petits et plus grands. Cette conception est encore celle qui sert de base à la plupart des exposés élémentaires non axiomatiques. Bien avant de faire de l'axiomatique systématiquement les mathématiciens furent cependant obligés de traduire les points de départ métaphysiques en termes logiques qui servirent de bases à leurs raisonnements; mais cette traduction était si indiquée qu'elle se fit sans qu'on

---

[1]) Je me suis permis de développer ici plusieurs points que j'avais du, oralement, me contenter d'indiquer très brièvement.

s'en rende nettement compte et dès les débuts de la science. Si bien que, tandis que la définition axiomatique des aires et des volumes, par exemple, n'a été expressement formulée qu'au XIX-e siècle, c'est pourtant cette même définition qui a toujours été utilisée dans toutes les recherches, élémentaires ou élevées.

Mais l'unité des considérations et leur grande simplicité n'est apparue que lorsque les savants eurent assez utilisé la notion de limite pour considérer que l'emploi de l'infini était chose naturelle, claire et légitime. L'infini s'introduit comme l'on sait dès la comparaison de deux longueurs, et c'est alors la fameuse question des incommensurables; mais elle s'introduit autrement encore dans l'étude des volumes. Il y a, à cet égard, une différence essentielle entre le problème des aires des polygones et celui des volumes des polyèdres: tandis qu'une comparaison de telles aires se ramène à une comparaison de longueurs sans l'emploi de l'infini, cet emploi est indispensable pour la comparaison des volumes des polyèdres. C'est de ce fait, prouvé au début du XX-e siècle, et de quelques questions connexes que je veux vous parler.

2. Le point de départ métaphysique de la notion d'aire, c'est l'idée que des domaines plans quelle que soit leur position absolue et relative occupent toujours une même *place*; ceci se traduit logiquement ainsi:

I. *Deux domaines D et D' formés respectivement par la réunion des domaines $D_1, D_2, \ldots, D_p$ et par la réunion des domaines $D'_1, D'_2, \ldots, D'_p$, D_i et D'_i étant égaux, ont même aire. Deux tels domaines seront dits équivalents de façon finie (en abrégé éq. de f. f.). Si D' n'est formé que par la réunion de certains seulement des D'_i l'aire de D est plus grande que celle de D'.*

Si, de plus. on veut traduire par un nombre le résultat de la comparaison, on exige qu'à deux domaines de même aire soit attaché le même nombre et qu'à un domaine d'aire plus grande que l'aire d'un autre soit attaché un nobmre aire plus grand que le nombre aire du second domaine; d'où le problème:

II. *Attacher à chaque domaine D un nombre positif tel qu'à l'addition des domaines corresponde l'addition des nombres attachés et qu'à deux domaines éq. de f. f. soient attachés les mêmes nombres.*

Cet énoncé est celui du problème des aires si les domaines D et D' sont plans, c'est le problème des volumes si les domaines D et D' sont à trois dimensions, ce serait le problème des longueurs si les domaines D et D' étaient découpés sur la droite et si l'on avait obtenu le nombre le plus général autrement que par la comparaison même des longueurs.

Le problème précédent peut encore s'énoncer:

III. *Attacher à chaque domaine plan D un segment d tel qu'à deux domaines D et D' éq. de f. f. correspondent deux segments d et d' éq. de f. f.*

Si l'on laissait au mot domaine une trop grande généralité on devrait s'attendre à avoir à considérer des domaines partiels D_i dépendant d'une infinité de paramètres de forme, on ne pourrait donc espérer résoudre le problème précédent sans un appel à l'infini; au contraire, cela est possible lorsque la famille des D est celle des polygones, auquel cas celle des D_i peut être supposée celle des triangles.

3. Soit en effet ABB_1A_1 un parallélogramme et A_2 un point du segment A_1B_1; il définit un parallélogramme ABB_2A_2 qui est éq. de f. f. au premier; prenant un point A_3 de A_2B_2 on arrive au parallélogramme ABB_3A_3 éq. de f. f. à ABB_2A_2 donc à ABB_1A_1 comme on le voit en traçant sur ABB_2A_2 à la fois les deux séries de segments de droites qui servaient à le subdiviser pour les passages à ABB_1A_1 et à ABB_3A_3. En continuant ainsi on voit que ABB_1A_1 est éq. de f. f. à tout parallélogramme $AB\beta\alpha$ où α est sur la droite indéfinie A_1B_1.

Choisissons α de manière que $A\alpha$ soit un nombre entier de fois l'unité de longueur choisie; soit par exemple 5 fois. Partageons $A\alpha$ en 5 parties égales, par les points de subdivision menons des parallèles à AB, nous obtenons 5 parallélogrammes qui, disposés autrement, donnent $AB'\beta'\alpha'$ tel que AB' soit porté par AB et égal à 5 fois AB et que $A\alpha'$ porté par $A\alpha$ soit égal à l'unité.

Recommençons les opérations du début, mais en faisant jouer à $A\alpha'$ le rôle de AB, nous obtenons un rectangle $AB_0\beta_0\alpha'$ dont la base $A\alpha'$ est égale à l'unité.

Soit un triangle ABC, β et γ les milieux de AB et de AC; faisons tourner $A\beta\gamma$ de π autour de C, β vient en β' et nous

avons le parallélogramme $BC\beta'\beta$ éq. de f. f. à ABC. D'où un rectangle de base unité équivalent de façon finie à un polygone D qu'on décomposera d'abord en triangles; le second côté de ce rectangle peut être considéré comme le segment d cherché.

Du moins si le problème est possible, ce qui tout d'abord exige que le segment d soit unique. Pour être certain qu'il en est ainsi, décomposons tout polygone donné $ABCD...$ en la somme algébrique des triangles $OAB, OBC, ...; O$ étant un point du plan choisi une fois pour toutes. Et au polygone attachons le segment somme algébrique de ceux attachés aux triangles $OAB, OBC, ...$ Ceux-ci sont bien déterminés car dans la transformation des parallélogrammes le produit de la base par la hauteur n'a pas changé. Ainsi nous attachons à notre polygone un segment orienté, de mesure positive et égale à

$$\tfrac{1}{2}[\varepsilon AB\cdot(O,AB)+\varepsilon' BC\cdot(O,BC)+...];$$

les symboles tels que (O,AB) désignant les distances de O aux côtés tels que AB; les $\varepsilon, \varepsilon', ...$ étant égaux à $+1$ ou à -1 suivant qu'aux voisinages des milieux de $AB, BC, ...$ le polygone est ou non du même côté que O par rapport $AB, BC, ...$

Si donc nous avions un polygone D divisé en deux autres D_1, D_2 par une ligne polygonale dont AB serait l'un des côtés, le produit $AB\cdot(O,AB)$ figurerait dans les nombres attachés à D_1 et D_2, mais avec des signes contraires et de là résulte immédiatement que le nombre attaché à D serait la somme de ceux associés à D_1 et à D_2. Ceci s'étend à D partagé en $D_1, D_2, ..., D_p$. Or on peut supposer que tous les D_i sont des triangles et l'on vérifie facilement que le nombre que notre procédé attache à un triangle est $+\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur.

Notre problème est donc possible; nous l'avons résolu et nos considérations montrent que la solution de ce problème est unique à un multiplicateur près correspondant au choix de l'unité d'aire.

4. Supposons maintenant que les domaines soient des polyèdres de l'espace euclidien ordinaire et traitons le problème des volumes.

Si D est un prisme, une opération analogue à celle qui nous permit de passer de $ABCD$ à $AB\beta\alpha$, opération qui est

d'ailleurs classique, permettra de remplacer le prisme D par n'importe quel autre prisme ayant même longueur d'arête, même surface latérale prismatique indéfinie. Le nouveau prisme pourra être supposé droit. Opérant sur la base de ce prisme comme au numéro précédent, nous obtenons un rectangle dont un des côtés est 1 par déplacements de morceaux de cette base; si chaque morceau emporte avec lui un prisme droit dont il est base et dont la hauteur est celle du prisme droit de départ, nous obtenons un parallélépipède rectangle dont une des arêtes est égale à l'unité. Considérons cette arête comme la hauteur et recommençons la même opération; nous construisons un parallélépipède rectangle dont une base est le carré de côté 1 et dont la hauteur est un segment qui jouera le rôle de d. Il est visible que la mesure de ce segment est le produit de la hauteur de D par l'aire de la base de D.

Jusqu'ici rien n'est donc changé et si nous ne considérions comme domaines partiels ou totaux que des prismes, le problème serait résolu car on vérifierait facilement que notre résultat remplit bien toutes les conditions imposées.

Mais nous voulons envisager des polyèdres quelconques, il faudrait donc savoir associer un segment à un tétraèdre, c'est à dire savoir construire un prisme qui soit éq. de f. f. à ce téraèdre. Et d'ailleurs, si l'on savait faire cela, le problème serait traité.

On sait que dans les cours on n'effectue cette construction que par un appel à l'infini, soit qu'on considère le tétraèdre comme la limite d'une suite indéfinie de corps construits avec des prismes, soit qu'on le considère comme la réunion d'une infinité actuelle de différentielles ou d'indivisibles. Entre tous ces procédés il n'y a que des différences de présentation, je puis donc les réunir en disant qu'il y s'agit toujours de l'emploi des méthodes du calcul intégral.

L'emploi de ces méthodes a quelque chose de choquant; un souci d'élégance, un besoin pédagogique de simplicité ont dû inciter de très bonne heure à rechercher pour le cas des volumes quelque méthode écartant le recours à l'infini.

L'un de mes auditeurs au Collège de France, M. R. Cast, m'a signalé à cet égard une phrase de la „Lettre de Diderot

sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient", où il est question du mathématicien aveugle SAUNDERSON qui fut professeur à l'Université de Cambridge: „Il est l'auteur d'un ouvrage très parfait dans son genre. Ce sont des éléments d'algèbre où l'on n'aperçoit qu'il était aveugle qu'à la singularité de certaines démonstrations qu'un homme qui voit n'eut peut-être pas rencontrées. C'est à lui qu'appartient la division du cube en six pyramides égales qui ont leurs sommets au centre du cube, et pour base, chacune une de ses faces. On s'en sert pour démontrer d'une manière très simple que toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur...".

Que DIDEROT croie pouvoir nommer le premier homme ayant remarqué une chose aussi visible que la décomposition d'un cube en six pyramides égales fait sourire; qu'il présente cette remarque comme presque inaccessible aux voyants serait étonnant si l'on ne savait que tous ceux qui écrivent sur les aveugles, à commencer par les aveugles eux-mêmes, pour bien mettre en valeur la substitution des sens, en arrivent à présenter la possession du sens de la vue comme la plus désastreuse des infirmités. Mais que veut dire DIDEROT par les derniers mots cités? Je l'ai demandé à M. JEAN ITARD, professeur au Lycée Michelet. M. ITARD, qui connait bien les manuels de Géométrie des XVI-e, XVII-e et XVIII-e siècles [1]), a pu me renseigner immédiatement:

„Diderot se trompe sur SAUNDERSON. L'algèbre de ce dernier est sortie en 1740. En 1741 CLAIRAUT publiait sa Géométrie où il emploie le même procédé. Cela consiste à montrer d'abord par une méthode plus ou moins voisine des indivisibles que le volume de la pyramide est en langage moderne $kB \cdot H$ (k coefficient de proportionnalité encore indéterminé). En prenant ensuite la pyramide sixième du cube, sommet au centre et base sur une face, k apparaît égal à $1/3$ [2]).

---

[1]) Voir *L'Enseignement scientifique*, 9-ième Ann., No 87, Avril 36; 10-ième Ann., No 94, Janv. 37; 11-me Ann., No 102, Nov. 37.

[2]) Pour préciser ce passage de la lettre de M. Itard, considérons deux pyramides T_1, T_2 de hauteurs H_1, H_2 et dont les bases convexes ont des

D'ALEMBERT aura dit, je le suppose, que son ennemi intime CLAIRAUT n'avait fait que reprendre une idée de SAUNDERSON et DIDEROT aura sauté sur l'occasion.

Mais SÉBASTIEN LE CLERC, en 1690, justifie dans sa Géométrie le facteur $^1/_3$ par la même considération, laissant de côté tout l'essentiel, c'est-à-dire ce qui précède.

LE CLERC était graveur et professeur à l'Académie de peinture où il était du parti de LEBRUN et donc adversaire de l'école de DESARGUES. Il était donc loin d'être aveugle! Je ne sais même pas, vu ses origines lorraines (il est né à Metz), s'il ne faudrait pas voir dans ses travaux des influences de DÜRER. En tout cas la méthode du cube est une invention de peintres, de sculpteurs, de gens qui voient".

La lettre de M. ITARD[1]) montre bien que l'évaluation du volume du tétraèdre a été l'occasion de multiples essais qui, d'une façon plus ou moins consciente, visaient à éliminer l'emploi de la méthode du calcul intégral, à utiliser seulement l'équivalence.

5. On remarquera que, dans ces essais, la notion d'équivalence est parfois élargie. L'équivalence simple que nous avons considérée supposait que les deux corps D et D' (dans

---

aires B_1, B_2. Soient deux arêtes S_1a_1, S_2a_2 respectivement de T_1 et T_2; divisons les chacune en n parties égales par les points $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$, d'une part; $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$ d'autre part. Enfermons T_1 dans le corps C_1, formé des prismes d'arêtes $a_1b_1, b_1c_1, \ldots$ et dont les bases sont les sections de T_1 par les plans parallèles à la base et passant par $a_1, b_1, \ldots$ Faisons de même pour T_2. Deux prismes de même rang dans C_1 et C_2 ont des bases dont les aires sont entre elles comme B_1 et B_2 et des hauteurs qui sont entre elles comme H_1 et H_2, donc leurs volumes sont entre eux comme $B_1 \cdot H_1$ et $B_2 \cdot H_2$ et par suite il en est de même des volumes de C_1 et C_2:

$$\frac{\text{Vol.}\,(C_1)}{\text{Vol.}\,(C_2)} = \frac{B_1H_1}{B_2H_2}.$$

On passera de là à l'égalité analogue pour T_1 et T_2 par les procédés ordinaires; c'est-à-dire en prenant plus ou moins de précautions suivant le degré de rigueur que l'on désire atteindre.

[1]) Cette lettre n'a pas été écrite pour être publiée; mais elle sépare si nettement ce qui est renseignement précis de ce qui est supposition ou suggestion que j'ai cru pouvoir la reproduire ici en entier.

la suite ce seront toujours deux polyèdres ou deux ensembles formés d'un nombre fini de polyèdres) pouvaient être partagés en un nombre fini de corps partiels D_i d'une part, D'_i de l'autre, respectivement égaux deux à deux; D_i égal à D'_i. Si LE CLERC trouve que la pyramide P à base carrée qu'il considère est équivalente au prisme P' de même base et dont la hauteur est le tiers de la hauteur de la pyramide, c'est parce qu'on peut former le même cube avec six pyramides égales à P ou avec six prismes égaux à P'. D'où l'*équivalence par multiplication*: D et D' seront dits équivalents par multiplication si un corps formé d'un certain nombre entier de fois D est éq. de f. f. simple avec un corps formé du même nombre de fois D'.

Enfin la décomposition faite plus haut d'un polygone en une somme algébrique de triangles incite à convenir que: deux corps D et D' seront dits *équivalents par différence* s'il existe deux corps Δ et Δ', éq. de f. f. simple et tels que $D+\Delta$ et $D'+\Delta'$ soient équivalents par multiplication.

L'emploi simultané de tous ces procédés constituera l'équivalence générale [1]); nous allons étudier l'équivalence des polyèdres en nous bornant à l'équivalence simple, mais les résultats qui ont été obtenus et que nous indiquerons sont valables pour l'équivalence générale.

6. Nous avons vu que le problème des aires, énoncé sous la forme II, était possible et admettait une solution déterminée, à un multiplicateur près, quand les domaines D sont les polygones du plan euclidien. Supposons que, par un raisonnement quelconque, on ait prouvé le même fait pour le cas où les polygones D sont découpés dans le plan de LOBATCHEWSKI et pour le cas où ils sont découpés sur la sphère; ce qu'il est effectivement possible de faire. On vérifie immédiatement qu'une solution du problème est donnée par le nombre:

$$\text{somme des angles de } D-\pi\times(\text{nombre de côtés de } D-2)$$

---

[1]) Il est inutile de rechercher ici s'il est ou non necessaire de recourir plusieurs fois à ces procédés pour transformer un corps D en un corps D'.

s'il s'agit de géométrie sphérique et par ce même nombre, changé de signe s'il s'agit de géométrie lobatchewskienne; donc, celle des solutions qu'on appellera l'aire vérifiera la relation:

$$\text{somme des angles de } D - \pi \times (\text{nombre de côtés de } D - 2) = \\ = k \times \text{aire de } D,$$

k étant une constante indépendante de D. Cette constante est positive pour la géométrie sphérique, nulle pour la géométrie euclidienne, négative pour la géométrie de LOBATCHEWSKI. On retrouve ainsi, en particulier, le théorème d'ALBERT GIRARD sur l'aire du triangle sphérique.

C'est en partant de ces faits que M. BRICARD a donné une impulsion décisive à l'étude de l'équivalence finie [1]. En s'efforçant de construire à l'aide des dièdres d'un polyèdre D une solution de notre problème II on est arrêté tout de suite, mais de tels efforts permirent à M. BRICARD d'apercevoir qu'entre les dièdres de deux polyèdres D et D' éq. de f. f. il existe une relation; du moins dans certains cas, car M. BRICARD avait fait implicitement une hypothèse que nous allons expliciter.

D et D', étant éq. de f. f., sont formés respectivement par la réunion des polyèdres $d_1, d_2, \ldots, d_p$ et par la réunion de $d'_1, d'_2, \ldots d'_p$; d_i et d'_i étant égaux pour chaque valeur de i. Nous supposerons de plus que si a_j est l'une quelconque des arêtes des d_i, aucun sommet de ces polyèdres d_i n'est situé à l'intérieur du segment a_j et de même qu'à l'intérieur de toute arête a'_j des d'_i il n'y a jamais de sommets des d'_i. Alors chaque arête a_j sera en général confondue avec plusieurs autres arêtes d_i; autour de ces arêtes on rencontrera plusieurs des dièdres α_m des d_i; les dièdres α_m se groupant ainsi en familles $s_1, s_2, \ldots$ Ceci étant, guidé par les faits rappelés au début de ce numéro, commençons par attacher à chaque d_i la somme Σ_n des dièdres correspondants; la somme des nombres attachés à $d_1, d_2, \ldots, d_p$ sera:

$$\sum_m \alpha_m = \sum_n (\sum \text{ des dièdres } \alpha_m \text{ de la série } s_n) = \sum_n \Sigma_n .$$

Or la parenthèse est égale à A_k, à 2π ou à π, suivant que l'arête de la série s_k est portée par l'arête d'un dièdre D de

[1]) Nouv. Ann. de Mathématiques, 1896. Voir aussi Sforza (Per. di Mat. 1897).

mesure A_k, ou est entiérement entourée de dièdres des d_i, ou qu'elle est intérieure soit à une face de D, soit à une face des d_i.

Ainsi on a:

$$\sum_m \alpha_m = \sum e_k A_k + e\pi,$$

les e étant des entiers positifs. Mais on a de même

$$\sum_m \alpha'_m = \sum e'_k A'_k + e'\pi,$$

et comme les dièdres α_m et α'_m sont respectivement égaux, il en résulte

$$\sum e_k A_k - \sum e'_k A'_k = E\pi,$$

E étant un entier positif, négatif ou nul.

M. BRICARD applique ce résultat au cas où D serait un tétraèdre régulier — tous les A_k ont alors une même valeur T —, et où D' serait un cube, — tous les A'_k seraient égaux à $\pi/2$; la relation précédente exigerait donc que T soit commensurable avec π, ce qui n'est pas. Donc un tétraèdre régulier ne peut être transformé en un cube par une transformation de la nature de celles envisagées.

7. Mais, pour étendre cette conclusion à toute équivalence simple, c'est-à-dire pour prouver qu'alors il existe une ou plusieurs relations linéaires homogènes à coefficients entiers (ou rationnels ce qui est la même chose) entre les A_k, A'_k et π, il fallait faire appel à une idée nouvelle. M. DEHN [1]) montra que, pour obtenir ces relations à coefficients rationnels, on pouvait, à l'exemple de ce que l'on fait dans certaines questions d'analyse indéterminée ou d'approximations, utiliser comme intermédiaire des relations linéaires à coefficients quelconques.

Groupant encore les dièdres α_m en séries s_n associées chacune à un même segment d'arête des d_i, limité par deux sommets des d_i et ne contenant à son intérieur aucun tel sommet, il associe à chaque série la somme Σ_n des α_m la constituant et la longueur σ_n du segment d'arête considéré. On n'aurait plus, en général

$$\sum \Sigma_n = \sum \Sigma'_{n'}$$

[1]) Math. Ann. Bd. LV (1902).

parce qu'un dièdre des d_i appartient à un certain nombre de séries s_n et le dièdre homologue a' peut appartenir à un nombre différent de séries s'_n; mais il est tout à fait clair que l'on a:

$$\sum \sigma_n \Sigma_n = \sum \sigma'_{n'} \Sigma'_{n'}.$$

Cette relation s'écrit encore:

$$\sum L_k A_k - \sum L'_k A'_k = N\pi,$$

relation dans laquelle N est un nombre quelconque inconnu. Il semblerait donc qu'elle ne pourra servir à rien. Mais, traduisant les considérations géométriques donnant ce résultat en des déductions purement algébriques, M. DEHN recherche des conditions auxquelles doivent être soumises des variables $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ quelconques pour que les mêmes calculs algébriques puissent être mis en oeuvre et il arrive ainsi à cet énoncé:

Soit ($\mathfrak{L}$) *le système des relations homogènes à coefficients entiers liant les arêtes* L_k *et* L'_k *de deux polyèdres ou systèmes de polyèdres* D, D'; *dans* ($\mathfrak{L}$) *on a remplacé les nombres* L_i, L'_i *par des inconnues* $\bar{L}_i, \bar{L}'_i$; *si* D *et* D' *sont éq. de f. f., à toute solution rationnelle* $(\bar{L}_i)_r$, $(\bar{L}'_i)_r$ *des équations* ($\mathfrak{L}$) *correspond un nombre rationnel* R, *positif, négatif ou nul, tel que l'on ait*:

$$(B) \qquad \sum (\bar{L}_k)_r A_k - \sum (\bar{L}'_k)_r A'_k = R \cdot \pi.$$

8. Cet énoncé [1]), qui est exact aussi bien pour l'équivalence générale que pour l'équivalence simple, fait donc apparaître des relations ($\mathfrak{B}$) de la forme de celles prévues par M. BRICARD. Une telle relation, au moins, existe bien toujours car les équations ($\mathfrak{L}$) étant à coefficients entiers, admettent une solution rationnelle soit confondue avec, soit aussi voisine qu'on le veut de leur solution L_i, L'_i. Ainsi on peut supposer que, dans ($\mathfrak{B}$), les nombres rationnels $(\bar{L}_k)_r$, $(\bar{L}'_k)_r$ sont ou confondus avec les L_k, L'_k ou aussi voisins qu'on le veut de ceux-ci.

La résolution des équations ($\mathfrak{L}$) donneront:

$$\bar{L} = t_1 \mathfrak{L}_{k,1} + t_2 \mathfrak{L}_{k,2} + \ldots, \qquad \bar{L}'_k = t_2 \mathfrak{L}'_{k,1} + t_2 \mathfrak{L}'_{k,2} + \ldots,$$

les t étant des paramètres arbitraires, les $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ des nombres rationnels fournissant un système de solutions indépendantes.

---

[1]) Pour sa justification, voir la Note I placée à la suite de cette conférence.

Ces solutions $\mathcal{L}_{k,f}, \mathcal{L}'_{k,f}$ sont en nombre $N-p$, si N est le nombre total des arêtes de D et D' et s'il y a p équations $(\mathcal{L})$ indépendantes; elles nous fournissent $N-p$ relations $(\mathcal{B})$. Celles-ci sont indépendantes car, s'il existait une combinaison linéaire homogène des premiers membres des $(\mathcal{B})$ qui soit identiquement nulle par rapport aux A_k, A'_k c'est que cette même combinaison faite, pour chaque valeur de k, sur les $\mathcal{L}_{k,f}$ et sur les $\mathcal{L}'_{k,f}$ donnerait des résultats nuls ce qui est impossible, les $\mathcal{L}_{k,f}, \mathcal{L}'_{k,f}$ étant des solutions indépendantes.

Donc, le théorème de M. DEHN exige, pour l'équivalence de D et D', un nombre total de conditions indépendantes égal au nombre total N des arêtes de D et D'. p de ces conditions, $p \leqslant N-1$, sont de la forme $(\mathcal{L})$, les $N-p$ autres, $N-p \geqslant 1$, font partie de la famille $(\mathcal{A})$ des relations linéaires, homogènes à coefficients entiers liant les A_i, A'_j et π.

On voit ainsi à nouveau que, s'il y a équivalence, il y a toujours une relation $(\mathcal{B})$. Donc, dans le cas d'équivalence, la famille $(\mathcal{A})$ contient toujours au moins une relation; mais se peut-il que la famille $(\mathcal{L})$ n'en contienne aucune? Pour que cela se produise, les $(\overline{L}_k)_r, (\overline{L}'_k)_r$ étant alors des nombres rationnels arbitraires, il faudrait que tous les A_i, A'_j soient commensurables avec π. Lorsque cette condition est réalisée l'équivalence peut exister sans qu'il y ait de relations $(\mathcal{L})$; les deux parallélipèdes rectangles de côtés

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3};\quad \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt{\frac{6}{35}},$$

qui sont éq. de f. f. puisqu'ils ont même volume, en sont un exemple.

Pour généraliser ces remarques supposons que parmi les dièdres de D et D' nous en ayions distingués certains en nombre N_1; les L, L', A, A' correspondant seront dits *distingués*. Si, dans les $(\mathcal{L})$, il y a μ_1 relations, $\mu_1 \leqslant N_1$ linéairement indépendantes par rapport aux L, L' distingués, les $\overline{L}, \overline{L}'$ correspondants dépendront de $N_1-\mu_1$ paramètres, d'où $N_1-\mu_1$ relations $(\mathcal{B})$ linéairement indépendantes par rapport aux A, A' distingués. Donc, *parmi les relations* $(\mathcal{L})$ *et* $(\mathcal{A})$ *il y en a au total au moins* N_1, *qui sont indépendantes par rapport aux* L, L' *distingués et par rapport aux* A, A' *distingués.*

9. Pour appliquer ces généralités, déduisons en que l'*equivalence finie entre un tetraèdre D et le cube D' de même volume est un fait tout à fait exceptionnel.* Définissons D par 6 paramètres, par exemple par les longueurs des six arêtes; elles ne sont assujetties qu'à des conditions d'inégalités, les égalités limites de ces inégalités donnent les frontières du domaine de l'espace à 6 dimensions dans lequel il faut prendre le point de coordonnées $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ figuratif des longueurs d'arêtes choisies. Une relation $(\mathcal{L})$ sera de la forme:

$$r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3 + r_4 L_4 + r_5 L_5 + r_6 L_6 + r_7 \sqrt[3]{V} = 0,$$

les r étant entiers et V étant l'expression du volume du tétraèdre en fonction de ses arêtes. Une relation de cette forme est représentée dans l'espace à 6 dimensions par une variété algébrique à cinq dimensions, à moins qu'elle ne soit vérifiée par tous les points de l'espace. Cette dernière hypothèse est évidemment à rejeter; disons, par exemple, soient L_1, L_2, L_3 les longueurs des arêtes SX, SY, SZ et L_4, L_5, L_6 les longueurs des arêtes respectivement opposées YZ, ZX, XY; si la relation algébrique était une identité, elle serait vérifiée pour S confondue avec X, auquel cas V est nul et l'on a: $L_1 = 0, L_2 = L_6$, $L_3 = L_5$; la relation linéaire d'où nous sommes partis, ou l'une de celles qui s'en déduisent par des changements de signes des r_i, serait vérifiée, ce qui donne:

$$(\pm r_2 \pm r_6) L_6 + (\pm r_3 \pm r_5) L_5 + r_4 L_4 = 0;$$

or une telle relation entre les 3 longueurs des côtés d'un triangle arbitraire est nécessairement identiquement nulle d'où $r_4 = 0$. Et de la même manière on montrerait que $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ sont nuls, donc aussi r_7.

Ainsi, pour que le système $(\mathcal{L})$ ne contienne aucune relation, puisque l'ensemble des systèmes de nombres entiers $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ est dénombrable, il suffira de prendre le point représentatif hors d'une infinité dénombrable de variétés algébriques.

De même, une relation $(\mathcal{A})$ étant

$$r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 + r_4 A_4 + r_5 A_5 + r_6 A_6 + r_7 \pi = 0,$$

se traduira par une relation algébrique entre les $\overline{L}$ non identiquement satisfaite car, autrement, elle resterait vraie pour la figure limite de celle obtenue en faisant tourner XYZ autour de XY, de façon à l'amener sur XYS, c'est-à-dire qu'on pourrait faire dans la relation linéaire entre les A_i ou dans celles qui s'en déduisent en modifiant certains des signes des r_i,

$$A_4 = \pi - A_2, \quad A_5 = \pi - A_1, \quad A_6 = 0.$$

Mais ceci donnerait une relation entre les trois dièdres A_1, A_2, A_3 du trièdre quelconque $SXYZ$, ce qui est impossible; la relation obtenue devrait donc être satisfaite quels que soient A_1, A_2, A_3 d'où, en particulier, $r_3 = 0$. Mais, de même, on annulerait $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ d'où r_7.

Ainsi, pour que le système $(\mathcal{A})$ ne contienne aucune relation, il suffit de prendre le point représentatif hors d'une infinité dénombrable de variétés algébriques.

En résumé: *le tétraèdre le plus général n'est pas éq. de f. f. à un prisme. Pour lui, aucune des six conditions nécessaires pour cette équivalence, exigées par le théorème de M. Dehn, n'est remplie.*

Pour préciser la portée analytique de cet enoncé, il faudrait étudier l'indépendance [1]) des conditions $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ soit qu'on particularise les constantes qu'elles contiennent, soit qu'on leur attribue toute la généralité possible; contentons-nous d'une remarque. Les longueurs des six arètes étant indépendantes, l relations $(\mathcal{L})$, $l \leqslant 6$, n'entrainent aucune autre relation $(\mathcal{L})$ mais elles se traduisent par l relations entre dièdres. Et comme entre les six dièdres d'un tétraèdre quelconque il y a une relation, cela peut nous conduire, au plus, à $l+1$ relations analytiques indépendantes entre les dièdres. a relations $(\mathcal{A})$ se traduisent par a relations entre les longueurs d'arêtes. Donc l relations $(\mathcal{L})$ et a relations $(\mathcal{A})$ entraînent au plus $2l+2a+1$ relations entre les longueurs d'arêtes et les grandeurs de dièdres; ce qui fera donc au plus, $2l+2a+1$

---

[1]) De par leur définition même les $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ sont linéairement indépendantes mais il s'agirait d'étudier si elles sont ou non indépendantes quand on tient compte des relations qui lient, dans un tétraèdre, les L_i aux A_j et les A_i entre eux.

relations ($\mathfrak{L}$) et ($\mathfrak{A}$). Pour avoir six telles relations il faut donc $l+a \geqslant 3$. *Ainsi il faut écrire au moins trois relations* ($\mathfrak{L}$) *et* ($\mathfrak{A}$) *entre les longueurs d'arêtes et les grandeurs des dièdres du tétraèdre le plus général pour qu'il puisse être éq. de f. f. à un prisme.*

Les trois relations dont il s'agit sont indépendantes non seulement linéairement, mais aussi compte tenu des relations analytiques qui lient dièdres et arêtes.

10. Je viens de m'arrêter un moment sur des remarques qui montrent nettement le caractère exceptionnel de l'équivalence finie, s'il s'agissait seulement de mettre en evidence la différence entre équivalence finie et égalité des volumes bien des énoncés amusants pourraient servir.

Soient deux polyèdres équivalents D, D' donc de même volume, je vais faire l'hypothèse que D est convexe, cela n'est pas nécessaire au raisonnement mais me permettra de dire que D est défini par les plans de ses faces, sans ajouter aucun autre renseignement qui sans cela serait nécessaire. Soient OX_1, $OX_2, \ldots, OX_p$ les directions perpendiculaires à ces faces. Je prends, aussi près qu'on le voudra de OX_2, une droite Ox_2 telle que l'angle X_1Ox_2 ne soit exprimable par aucune relation linéaire à coefficients rationnels entre π et les dièdres de D'; puis Ox_3, aussi près qu'on le voudra de OX_3, et telle que X_1Ox_3 et x_2Ox_3 ne soient pas exprimables par des relations de la même espèce entre les mêmes angles et x_1Ox_2; puis Ox_4 de même, mais en tenant compte cette fois de $x_1Ox_2, x_1Ox_3, x_2Ox_3$; puis Ox_5 en tenant compte de $x_1Ox_2, x_1Ox_3, x_1Ox_4, x_2Ox_3, x_2Ox_4, x_3Ox_4$ etc. Faisons tourner chaque face de D autour d'un de ses points pour que, si la position de départ était perpendiculaire à OX_k, la position finale soit perpendiculaire à Ox_k. Nous avons ainsi un nouveau polyèdre D_0 très voisin de D; une homothétie convenable de D_0 donnera un polyèdre D_1 très voisin de D, de même volume que D et D'. Or il est clair que D_1, n'est pas éq. de f. f. à D' puisque aucune relation ($\mathfrak{A}$) ne contient les dièdres de D_1.

Ainsi, *étant donnés deux polyèdres de même volume D et D', on pourra modifier d'aussi peu que l'on voudra les inclinaisons mutuelles des faces de D et obtenir un polyèdre D_1 de même volume que D' et non éq. de f. f. à D'.*

Il est clair que, de la même façon, *étant donné un polyèdre D' on peut construire une suite indéfinie de polyèdres $D_1, D_2, D_3 \ldots$ tous de même volume que D', dont aucun n'est éq. de f. f. à D' et tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas éq. de f. f.* [1]).

Revenons au cas de deux polyèdres D et D'; nous avons obtenu D_1, de même volume que D' et non éq. de f. f. à lui; serait-il toujours possible d'obtenir un polyèdre $\mathcal{P}_1$ de même volume que D, aussi voisin qu'on le voudra de D, et éq. de f. f. à D'? C'est l'une des nombreuses questions que l'on pourra se poser à l'occasion de ce qui précède. Certes on le pourra si D' est un prisme, il suffirait de prendre $\mathcal{P}_1$ formé de cubes ou de prismes, mais est-ce toujours possible quand D' est quelconque?

Remarquons encore qu'un $\mathcal{P}_1$ formé de cubes et pris très voisin de D peut être cependant fort différent de D par la forme; déjà notre polyèdre D_1 pourrait être fort différent de D bien qu'il ait le même nombre de faces que lui. Ce n'est que dans le cas particulier où D n'aurait eu que des sommets trièdres que D_1 aurait eu même *structure* que D, c'est-à-dire qu'il existerait entre les points frontières de D et D_1 une correspondance continue faisant correspondre sommet à sommet, arête à arête, face à face. La question se pose de savoir si l'on peut trouver D_1 et $\mathcal{P}_1$ de même structure que D; question peut-être délicate à traiter, ce qui suffirait à justifier qu'on s'en occupe.

Une autre question, sans doute difficile, est celle-ci: revenant au cas où D est un tétraèdre et où D' est le cube de même volume, préciser tous les cas possibles quant au nombre de relations ($\mathcal{L}$) et ($\mathcal{A}$) linéairement indépendantes et en donner des exemples précis numériques.

11. C'est à l'aide de tels exemples précis que M. M. Bricard et Dehn ont tout d'abord montré la différence entre égalité des volumes et équivalence finie. M. Bricard avait considéré le cas où D était un tétraèdre régulier et D' un cube; M. Dehn a considéré de plus le cas où, D étant encore un tétraèdre régulier, D' serait formé de deux tels tétraèdres.

---

[1]) Bien entendu il conviendrait cette fois de remplacer les choix arbitraires par des choix déterminés, ce qui est immédiat.

Par ces exemples, ces Auteurs posaient le problème de l'équivalence dans le cas où D et D' sont deux systèmes de polyèdres réguliers, problème dont nous allons nous occuper.

Il est bon que je rappelle, tout d'abord, comment on peut calculer les éléments des polyèdres réguliers. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite à un polyèdre, A un sommet de ce polyèdre, AB une arête dont le milieu est I et soit O le centre d'une des deux faces passant par AB. Les dièdres du trièdre ΩA, ΩO, ΩI sont:

$$\mathfrak{D}\cdot\Omega I=\frac{\pi}{2}, \qquad \mathfrak{D}\cdot\Omega A=\frac{\pi}{s}, \qquad \mathfrak{D}\cdot\Omega O=\frac{\pi}{f},$$

s'il y a s faces passant par chaque sommet et si chaque face a f côtés. Les faces de ce trièdre sont les angles sous lesquels de Ω on voit le $\frac{1}{2}$ côté AI, l'apothème OI, le rayon OA du cercle circonscrit à une face et comme les triangles $\Omega OI, \Omega OA$, ΩIA sont rectangles respectivement en O, en O et en I, le calcul des longueurs à partir de l'une d'elles serait facile. Ce sont les dièdres qui nous intéressent; $OI\Omega$ est la moitié de l'angle plan du dièdre $\mathfrak{D}$ suivant AB, donc la face $O\Omega I$ de notre trièdre est aussi $\frac{\pi}{2}-\frac{\mathfrak{D}}{2}$. D'où la formule:

$$\cos\frac{\pi}{s}=\sin\frac{\mathfrak{D}}{2}\sin\frac{\pi}{f},$$

qui donnera $\sin\frac{\mathfrak{D}}{2}$, d'où $\operatorname{tg}\mathfrak{D}$. On trouve ainsi, pour les dièdres T, H, O, D, I des cinq polyèdres réguliers

$$\operatorname{tg} T=2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} H=\infty, \quad \operatorname{tg} O=-2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} D=-2, \quad \operatorname{tg} I=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Utilisons le fait suivant [1]): *Les seuls angles commensurables avec π dont le carré de la tangente est rationnel sont les angles*:

$$\begin{array}{ll} k\dfrac{\pi}{2}, & k \text{ entier}, \operatorname{tg}^2 k\pi=0,\infty, \\[2ex] k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}, & \operatorname{tg}^2\left(k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=1, \\[2ex] k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}, & \operatorname{tg}^2\left(k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}, \\[2ex] k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}, & \operatorname{tg}^2\left(k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\right)=3. \end{array}$$

[1]) Voir la Note II placée à la suite de cette conférence.

Nous constatons que les angles T, O, D, I sont incommensurables avec H donc *un cube n'est éq. de f. f. avec aucun autre polyèdre régulier de même volume*. C'est la généralisation du résultat tout d'abord indiqué par M. BRICARD, mais on peut aller plus loin.

Des valeurs indiquées des tangentes, il résulte que $T+O=\pi$ donc T et O ne sont pas commensurables entre eux, sans quoi ils le seraient avec π. Soit d'autre part un couple de deux de nos dièdres, sauf le couple T, O, et ne contenant pas H. Par exemple T et I, s'ils étaient commensurables entre eux on aurait $2mT=2nI$, m et n étant entiers; nous savons déjà que $\operatorname{tg} 2mT$ et $\operatorname{tg} 2nI$ ne sont pas nulles puisque T et I sont incommensurables avec π, mais les expressions de $\operatorname{tg} 2mT$ et $\operatorname{tg} 2nI$ nous les donnent sous la forme de polynômes en $\operatorname{tg}^2 T$, ou $\operatorname{tg}^2 I$, multipliés respectivement par $\operatorname{tg} T$, ou $\operatorname{tg} I$. Donc on a:

$$\operatorname{tg} 2mT = r\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg} 2nI = r'\sqrt{5},$$

r et r' étant des nombres rationnels non nuls; l'égalité $2mT=2nI$ est impossible. Donc, *les cinq dièdres des polyèdres réguliers sont incommensurables deux à deux et, par suite, deux polyèdres réguliers ne peuvent être éq. de f. f. que s'il sont égaux.*

Bien entendu on pourrait aussi bien conclure que la figure D, formée d'un nombre fini de polyèdres réguliers semblables entre eux, ne peut être éq. de f. f. à une figure D', formée d'un nombre fini de polyèdres réguliers semblables entre eux, que si tous ces polyèdres sont semblables entre eux. Mais même dans ce cas l'équivalence est-elle possible? Il est clair qu'il y a équivalence s'il s'agit de figures de même volume et formées de cubes, si, au contraire, il s'agissait de figures formées de tétraèdres réguliers nous savons déjà, d'après M. DEHN, que l'équivalence est impossible si l'une des figures contient un seul tétraèdre et l'autre deux. Ceci se généralise facilement: *un polyèdre régulier autre qu'un cube ne peut jamais être transformé par équivalence finie en plusieurs polyèdres semblables à lui*. Soit, en effet, L l'arête du premier polyèdre. l_1, l_2, l_3, l_4, par exemple, les arêtes de quatre polyèdres qu'on aurait déduit du premier par équivalence finie, le théorème de M. DEHN

nous donnerait, puisque tous les dièdres sont égaux et incommensurables avec π,

$$\bar{L}=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_3+\bar{l}_4$$

pour tout système de solutions rationnelles des ($\mathcal{L}$). Et il y a, on l'a remarqué, des solutions aussi voisines qu'on le veut de L, l_1, l_2, l_3, l_4; on devrait par suite avoir:

$$L=l_1+l_2+l_3+l_4$$ [1]).

Mais l'égalité des volumes requérrait

$$L^3=l_1^3+l_2^3+l_3^3+l_4^3,$$

il y a contradiction.

De même, on voit *qu'un système de deux polyèdres réguliers ne peut être équivalent de façon finie à un autre système de deux polyèdres réguliers, si les quatre polyèdres sont semblables entre eux et ne sont pas des cubes*; car l'équivalence requérrait

$$L_1+L_2=l_1+l_2 \qquad \text{et} \qquad L_1^3+L_2^3=l_1^3+l_2^3.$$

Jusqu'ici le fait que T, O, H, D, I sont incommensurables deux à deux est seul intervenu de sorte que les résultats peuvent s'étendre à d'autres polyèdres que les polyèdres réguliers; un seul exemple suffira: *Un polyèdre dont tous les dièdres sont commensurables avec π, sauf certains d'entre eux qui sont égaux, ne peut être transformé par équivalence finie en plusieurs autres polyèdres semblables à lui*. Si, en effet, on représentait par $\mathcal{L}$ la somme des longueurs L des arêtes des dièdres A non commensurables avec π et par $\bar{\mathcal{L}}$ la somme des $\bar{L}$ correspondant, et si $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sont les rapports de similitude des polyèdres obtenus au polyèdre primitif, le théorème de DEHN donnerait, R étant rationnel,

$$(\bar{\mathcal{L}}-k_1\bar{\mathcal{L}}-k_2\bar{\mathcal{L}}-\ldots-k_p\bar{\mathcal{L}})A=R\pi,$$

d'où

$$k_1+k_2+\ldots+k_p=1;$$

tandis que l'égalité des volumes exigerait

$$k_1^3+k_2^3+\ldots+k_p^3=1.$$

---

[1]) On peut aussi dire la relation $\bar{L}=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_3+\bar{l}_4$ devant faire partie des ($\bar{\mathcal{L}}$), la relation $L=l_1+l_2+l_3+l_4$ fait partie des ($\mathcal{L}$).

Dans le cas le plus général de deux systèmes de polyèdres D et D' il conviendrait de même d'exprimer arithmétiquement tous les dièdres à l'aide de π et du plus petit nombre possible de dièdres, c'est-à-dire de résoudre les équations $(\mathcal{A})$ linéaires à coefficients entiers liant les dièdres et π. Lorsque D et D' ne sont formés que de polyèdres réguliers cela est possible car alors, très exceptionnellement, on sait écrire le système $(\mathcal{A})$.

12. Nous avons trouvé deux relations $(\mathcal{A})$, savoir:

$$2H=\pi, \qquad T+O=\pi;$$

grâce à elles toute autre relation $(\mathcal{A})$ s'écrirait

$$2n_1T+2n_2D+2n_3I=2n_4\pi,$$

d'où

$$\operatorname{tg}(2n_1T+2n_2D)=-\operatorname{tg}2n_3I=\frac{\operatorname{tg}2n_1T+\operatorname{tg}2n_2D}{1-\operatorname{tg}2n_1T\cdot\operatorname{tg}2n_2D}.$$

Or nous avons dit que

$$\operatorname{tg}2n_1T_1=r_1\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg}2n_2D=r_2, \qquad \operatorname{tg}2n_3I=r_3\sqrt{5},$$

r_1, r_2, r_3 étant des nombres rationnels non nuls. Donc on aurait

$$-r_3\sqrt{5}=\frac{r_1\sqrt{2}+r_2}{1-r_1r_2\sqrt{2}}=\frac{r_1(1+r_2^2)\sqrt{2}+r_2(1+2r_1^2)}{1-2r_1^2r_2^2},$$

égalité évidemment impossible: *entre les dièdres des polyèdres réguliers et π il n'existe pas d'autres relations linéaires à coefficients entiers que celles qui résultent de $2H=\pi$, $T+O=\pi$.*

Si donc on a deux systèmes D et D' de polyèdres réguliers et que ces systèmes soient équivalents, les relations de DEHN qui s'écrivent, à l'aide de notations qui se comprennent immédiatement,

$$(\bar{\mathcal{L}}_T-\bar{\mathcal{L}}'_T)T+(\bar{\mathcal{L}}_H-\bar{\mathcal{L}}'_H)H+(\bar{\mathcal{L}}_O-\bar{\mathcal{L}}'_O)O+(\bar{\mathcal{L}}_D-\bar{\mathcal{L}}'_D)D+(\bar{\mathcal{L}}_I-\bar{\mathcal{L}}'_I)I=R\pi$$

donnent

$$[(\bar{\mathcal{L}}_T-\bar{\mathcal{L}}_O)-(\bar{\mathcal{L}}'_T-\bar{\mathcal{L}}'_O)]\,T+(\bar{\mathcal{L}}_D-\bar{\mathcal{L}}'_D)\,D+(\bar{\mathcal{L}}_I-\bar{\mathcal{L}}'_I)\,I=R_1\pi,$$

d'où

$$\bar{\mathcal{L}}_T-\bar{\mathcal{L}}_O=\bar{\mathcal{L}}'_T-\bar{\mathcal{L}}'_O, \qquad \bar{\mathcal{L}}_D=\bar{\mathcal{L}}'_D, \qquad \bar{\mathcal{L}}_I=\bar{\mathcal{L}}'_I;$$

relations qui sont satisfaites si, et seulement si, l'on a:

$$\mathcal{L}_T-\mathcal{L}_O=\mathcal{L}'_T-\mathcal{L}'_O, \qquad \mathcal{L}_D=\mathcal{L}'_D, \qquad \mathcal{L}_I=\mathcal{L}'_I.$$

Ces conditions nécessaires d'équivalence sont, avec celle qui exprimerait l'égalité des volumes, les seules que nous sachions écrire pour le cas de deux systèmes de polyèdres réguliers. Elles fourniraient naturellement à nouveau les énoncés déjà formulés mais elles permettent d'aller un peu plus loin; on peut affirmer, par exemple, *qu'un polyèdre régulier autre qu'un cube ne peut être transformé en polyèdres réguliers semblables entre eux par équivalence finie.* Les conditions nécessaires précédentes exigeraient en effet que les polyèdres obtenus soient semblables aussi au polyèdre primitif. On peut dire aussi *qu'un polyèdre régulier autre qu'un cube ne peut être transformé par équivalence finie en deux polyèdres réguliers.* En effet, il nous suffit d'examiner le cas où les deux polyèdres obtenus ne sont pas semblables entre eux; mais alors nos conditions exprimeraient que l'un d'eux est semblable au polyèdre primitif et au moins égal à celui-ci, ce qui est impossible.

Quant à l'équivalence finie d'un polyèdre régulier en un système de polyèdres réguliers, nos conditions nécessaires laissent les possibilités suivantes: transformation d'un polyèdre régulier P en des polyèdres P_1, semblables à P et dont la longueur totale des arêtes est la même que pour P, et de plus en des cubes, $\mathcal{C}$, des tétraèdres $\mathcal{T}$, des octaèdres $\mathcal{O}$ la longueur totale des arêtes des tétraèdres $\mathcal{T}$ étant égale à la longueur totale des arêtes des octaèdres $\mathcal{O}$ [1]). Dans le cas où P est un cube, la condition d'égalité de longueur totale entre les arêtes de P et de P_1 disparait; de sorte que, par exemple, il n'est pas exclu qu'un cube puisse être éq. de f. f. à un système formé d'un tétraèdre et d'un octaèdre.

Nous sommes entièrement dépourvus de moyens ayant quelque généralité pour décider si les équivalences que nos conditions nécessaires ne nous ont pas permis de déclarer impossibles, existent ou non. On ne connaît, en effet, aucune condition suffisante d'équivalence, si restrictive soit-elle; on ne connaît que des exemples d'équivalence. C'est là une grave lacune de la théorie actuelle de l'équivalence finie, sur laquelle j'appelle l'attention des jeunes chercheurs.

---

[1]) Bien entendu, même si P est un tétraèdre par exemple, il faut distinguer les P_1 des $\mathcal{T}$.

C'est par des dissections de polyèdres réguliers en polyèdres réguliers — ce qui est un cas particulièrement évident d'équivalence finie simple entre le polyèdre primitif et l'ensemble de ses parties — que je vais répondre, très partiellement, aux questions d'existence soulevées il y a un instant.

13. On connait bien deux telles dissections. Partant d'un cube, d'un tétraèdre régulier ou d'un octaèdre régulier, divisons-en les arêtes en n parties égales, n étant un entier quelconque, et par les points de division menons des plans parallèles aux faces. Nous disséquons le polyèdre initial P en polyèdres réguliers p_i qui sont tous des cubes si P était un cube, qui sont des octaèdres et des tétraèdres si P était un tétraèdre ou octaèdre. Par exemple, on divisera ainsi un cube en 8 cubes, un tétraèdre en 4 tétraèdres et 1 octaèdre, un octaèdre en 6 octaèdres et 8 tétraèdres. La prolongation indéfinie des séries de plans parallèles qui viennent de nous servir donne deux pavages de l'espace: le pavage I en cubes égaux, le pavage II en tétraèdres et octaèdres de même longueur d'arête. Si nous ne conservons que 3 des 4 séries de plans parallèles qui donnaient le pavage II, nous obtenons un pavage III la maille est un parallélipipède à faces losanges, un rhomboèdre. Ce rhomboèdre, qui se présente à nous comme formé d'un octaèdre régulier et de deux tétraèdres réguliers, est, comme tout prisme, éq. de f. f. à un cube. Donc *un cube est éq. de f. f. au système formé de deux tétraèdres réguliers et d'un octaèdre régulier, tous trois de même longueur d'arête.*

Ainsi, partant d'un cube P divisé en cubes p_i, nous pourrons agglomérer certains de ces p_i en cubes plus grands, remplacer d'autres p_i ou certains de ces cubes plus grands par des systèmes de deux tétraèdres et d'un octaèdre; partant d'un tétraèdre ou octaèdre P divisé en tétraèdres et octaèdres p_i nous pourrons agglomérer certains de ces p_i en tétraèdres ou octaèdres plus grands puis remplacer certains des systèmes de deux tétraèdres et d'un octaèdre tous trois de même longueur d'arête par un cube. Bref, nous prouvons que *par équivalence finie un cube, un tetraèdre régulier ou un octaèdre régulier, peut être transformé en un système formé de cubes, de tetraèdres réguliers et d'octaèdres réguliers.*

14. Renonçons à la transformation d'un rhomboèdre en un cube par équivalence, les pavages I et II nous donnent d'abord les p_i, des agglomérations convenables de ces p_i nous donnent quantité de dissections d'un *cube (d'un tétraèdre ou octaèdre) en cubes (en tétraèdres et octaèdres) dont les faces sont parallèles à celles du solide primitif; les arêtes de tous ces solides ont une commune mesure*, savoir la n-ième partie de l'arête de P si, pour avoir le pavage, on avait divisé cette arête en n parties égales.

Pour terminer, je vais prouver que *les dissections qui viennent d'être indiquées sont les seules dissections de polyèdres réguliers en polyèdres réguliers qui existent.* En effet, si un polyèdre P est disséqué en polyèdres partiels P_i, chaque dièdre de P est une somme de dièdres des P_i; or entre les dièdres des polyèdres réguliers n'existent que les relations $2H=\pi$, $T+O=\pi$. Donc si P et les P_i sont réguliers, ceux des P_i qui emplissent les dièdres de P sont semblables à P. La longueur totale des arêtes de ceux des P_i qui sont semblables à P doit donc être supérieure à la longueur des arêtes de P, puisque les arêtes de ces P_i, qui ne sont pas toutes confondues avec celles de P, doivent pourtant recouvrir toutes celles de P. Mais nos conditions nécessaires d'équivalence appliquées à P pris pour D et à la famille des P_i prise pour D' montre que si D est un dodécaèdre ou un icosaèdre ces deux longueurs totales doivent être égales. *Un dodécaèdre ou un icosaèdre ne peut donc pas être disséqué en polyèdres réguliers.*

Supposons, pour fixer les idées, que P soit un tétraèdre; ses dièdres sont remplis par des tétraèdres P_i; enlevons-les. Il nous reste un polyèdre, ou un ensemble de polyèdres, P' dont les dièdres inférieurs à π sont égaux à $\pi-T=O$ donc sont remplis par des P_i octaédriques. Ces octaèdres ont leurs faces parallèles à celles de P; donc, en enlevant ces nouveaux P_i, on a un polyèdre P'' dont les dièdres inférieurs à π étant toujours formés par des plans de mêmes directions sont T ou O; on pourra donc continuer le raisonnement jusqu'à ce qu'on ait enlevé tous les P_i. La dissection de notre tétraèdre n'est donc bien possible qu'en tétraèdres et octaèdres à faces parallèles à celles du tétraèdre primitif.

Prenons trois arêtes de celui-ci pour axes de coordonnées et considérons les projections obliques associées à ces coor-

données. Les sommets des P_i projetés divisent les axes en segments que j'appellerai respectivement a_i, b_j, c_k. Appelons l_m l'arête de P_m, l celle de P. Entre toutes ces quantités il existe des relations linéaires, celles qui expriment l et les l_m en fonctions des a_i, en fonctions des b_i, en fonctions des c_i, d'une manière pour les tétraèdres, de deux manières pour les octaèdres qui ont, chacun, deux arêtes parallèles à chaque axe et celles qui expriment que chaque tétraèdre a une face parallèle à celle des faces de P qui n'est pas plan de coordonnées et que chaque octaèdre a deux telles faces. Toutes ces relations sont linéaires homogènes à coefficients entiers, elles permettent d'obtenir sans indétermination les a_i, b_j, c_k en fonction de l et des l_m.

Considérons le système $(\mathcal{S})$ d'équations linéaires obtenu en remplaçant, dans toutes les relations linéaires, homogènes, à coefficients rationnels entre les a, b, c, l, les longueurs connues a_i, b_j, c_k, l_m par des inconnues $\bar{a}_i, \bar{b}_j, \bar{c}_k, \bar{l}_m$. Ce système est possible, nous allons montrer qu'il est déterminé et nous savons qu'il nous suffira pour cela de montrer qu'il détermine les l_m. S'il n'en était pas ainsi on aurait des solutions telles que:

$$\bar{l}_m = l_m + l_m^1 t_1 + l_m^2 t_2 + \dots,$$

les $t_1, t_2, \dots$ étant des paramètres arbitraires. Or, parmi les conséquences algébriques de $(\mathcal{S})$, se trouve la relation qui généralise celle exprimant que le volume de P est la somme de ceux des P_i, savoir:

$$l^3 = \sum \lambda_m \bar{l}_m^3,$$

λ_m étant 1 ou 4 suivant que P_m est un tétraèdre ou un octaèdre. Or ceci s'écrit:

$$l^3 = \sum \lambda_m l_m^3 + \dots + 3 \sum \lambda_m l_m (l_m^1)^2 \cdot t_1^2 + \dots$$

Il faudrait donc, en particulier, que l'on ait

$$\sum \lambda_m l_m (l_m^1)^2 = 0,$$

relation impossible puisque tous les termes du premier membre sont positifs. Notre système est donc déterminé, sa résolution donnera les l_m en fonction de l par des calculs rationnels faits à partir des équations $(\mathcal{S})$ à coefficients entiers; les rapports l_m/l sont donc bien tous *rationnels*.

Le raisonnement précédent s'appliquant aussi bien aux cas de l'hexaèdre et de l'octaèdre, notre théorème est démontré.

15. Il est assez curieux de remarquer qu'il conduit à une condition de commensurabilité à rapprocher de celles auxquelles la théorie des quanta, rajeunissant et renouvelant les anciennes lois de rapports simples, a conduit récemment.

Et, puisque nous pensons un instant à la physique, constatons que des méthodes comme celles relatives à l'étude des cristaux par les rayons X, ont montré l'intérêt que présenterait pour les physiciens une connaissance profonde des polyèdres, que les mathématiciens ont jusqu'ici très peu étudiés [1]). C'est l'une des raisons qui m'a fait choisir le problème de l'équivalence comme sujet de cette conférence; ce problème peut en effet fournir une occasion de pénétrer quelque peu dans le monde peu connu des polyèdres.

Ce problème n'est évidemment pas de ceux qui s'imposent avec urgence à l'attention des mathématiciens physiciens, malgré ses origines lointaines qui le rattacheraient quelque peu à l'atomistique: C'est, en effet, le besoin, l'espoir de trouver des constituants simples et constants pour les corps qui fit croire aux mathématiciens que deux longueurs quelconques avaient toujours une commune mesure, un atome commun, et l'équivalence de deux polyèdres dès qu'ils ont le même volume pouvait sembler être une conséquence naturelle de l'existence pour ces deux polyèdres d'atomes communs. En somme, des espoirs en ce sens semblaient fondés puisque la même idée générale avait procuré de remarquables succès: ainsi, en considérant le plan pavé de triangles égaux, on avait été conduit au théorème de THALÈS.

Peu importe, après tout, que le problème de l'équivalence ait ou non une importance concrète; le mathématicien ne s'occupe pas des questions à cause de possibilités d'utilisations immédiates; il lui suffit qu'il reste à chercher, qu'il y ait des difficultés à vaincre, des beautés à découvrir; j'espère avoir réussi à convaincre les jeunes qui ont bien voulu m'écouter que le problème de l'équivalence remplit ces trois conditions.

---

[1]) Récemment un physicien français, M. G. Fournier, retrouvait les nombres de la série de Mendeleef par la considération de certains corps formés à l'aide du pavage II.

Note I

Je vais reprendre ici la démonstration, esquissée dans le texte, du théorème de M. DEHN. Nous sommes partis de deux polyèdres, ou systèmes de polyèdres, D et D', divisés respectivement en polyèdres d_i, d'_i congruents; nous avons considéré un segment s_n d'une arête de l'un des d_i pris aussi grand que possible sans qu'il contienne un sommet des d_i à son intérieur et à ce segment de longueur σ_n, nous avons attaché la somme Σ_n des dièdres a_p des d_i qu'on rencontre en tournant autour de s_n. Or, on a:

$$(1) \qquad \Sigma_n = A_k, \quad 2\pi, \quad \pi;$$

suivant les cas. On a aussi la relation analogue pour D', les Σ'_n étant aussi des sommes de dièdres a_p

$$(1') \qquad \Sigma'_n = A'_k, \quad 2\pi, \quad \pi;$$

Les longueurs l_m des arêtes des d_i et les longueurs L_m des arêtes de D s'expriment par des relations:

$$(2) \qquad l_m = \sum \theta_k \sigma_k, \quad L_m = \sum \eta_k \sigma_k,$$

les θ_k et η_k étant égaux à 0 ou à 1. Et de même

$$(2') \qquad l_m = \sum \theta'_k \sigma'_k, \quad L'_m = \sum \eta'_k \sigma'_k.$$

D'après la définition même des σ_k et σ'_k nous sommes d'ailleurs certains que l'inversion des systèmes (2) et (2′) est possible et donnerait des relations

$$(3) \quad \sigma_k = \sum \zeta_n l_n + \sum \tau_n L_n, \qquad (3') \quad \sigma'_k = \sum \zeta'_n l_n + \sum \tau'_n L'_n$$

les $\zeta, \tau, \zeta', \tau'$ étant égaux à 0 ou à ± 1; chaque σ_k est donné par au moins une égalité (3) mais peut-être donné par plusieurs telles égalités et de même pour σ'_k.

De sorte que lorsque l'on forme, avec M. DEHN, la somme $\sum \sigma_n \Sigma_n$, sa valeur $\sum l_m a_m$, évidente géométriquement, résulte aussi algébriquement des égalités (2) ou (3). On a ainsi, comme conséquence algébrique de (1), (2) la relation:

$$(4) \qquad \sum l_m a_m = \sum L_k A_k + \pi \sum \xi_k \sigma_k,$$

ξ étant égal à *0*, *2* ou *1* suivant que le second membre de l'égalité (1) relative à D_k est un A, est 2π, ou est π. Tenant compte de (3), ceci s'écrit encore:

(5) $$\sum l_m a_m = \sum L_k A_k + \pi\left(\sum E_k L_k + \sum e_k l_k\right),$$

les E et e étant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

De même on aura:

(5′) $$\sum l_m a_m = \sum L'_k A'_k + \pi\left(\sum E'_k L'_k + \sum e'_k l_k\right),$$

d'où

(6) $$\sum L_k A_k - \sum L'_k A_k = \pi\left[\sum E_k L_k - \sum E'_k L'_k + \sum (e_k - e'_k) l_k\right].$$

Cette relation, étant conséquence algébrique des précédentes, il suffirait que des variables $\bar{L}_k, \bar{A}_k, \bar{L}'_k, \bar{A}'_k, \bar{l}_m, \bar{a}_m, \bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_n$ vérifient les relations $(\bar{1})$, $(\bar{1}')$, $(\bar{2})$, $(\bar{2}')$ obtenues en mettant dans (1), (1′), (2), (2′), ces variables à la place de $L_k, A_k, L'_k, A'_k, l_m, a_m, \sigma_n, \sigma'_n$ pour qu'on en déduise:

$(\bar{6})$ $$\sum \bar{L}_k \bar{A}_k - \sum \bar{L}'_k \bar{A}'_k = \pi\left[\sum E_k \bar{L} - \sum E'_k \bar{L}'_k + \sum (e_k - e'_k) \bar{l}_k\right].$$

L'égalité $(\bar{6})$ ne contenant pas $\bar{a}_m, \bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}'_n$, éliminons ces inconnues des équations $(\bar{1})$ et $(\bar{1}')$ d'une part, $(\bar{2})$ et $(\bar{2}')$ d'autre part; ceci nous donne des relations desquelles, dans l'ignorance où nous sommes de la disposition et de la forme des d_i et d'_i, nous pouvons dire seulement que ce sont des relations linéaires homogènes à coefficients entiers entre les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ et π d'une part, entre les $\bar{L}_k, \bar{L}'_k, \bar{l}_k$ d'autre part.

Résolvons ces dernières relations par rapport aux $\bar{l}_n$, nous obtiendrons chaque $\bar{l}_n$ comme fonction linéaire homogène à coefficients rationnels des $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$, et éventuellement de paramètres arbitraires. Portons ces valeurs dans $(\bar{6})$, les paramètres arbitraires ne figurant qu'au second membre disparaîtront et nous trouverons:

$(\bar{7})$ $$\sum \bar{L}_k(\bar{A}_k - r_k\pi) = \sum \bar{L}'_k(\bar{A}'_k - r'_k\pi),$$

les r et r' étant des nombres rationnels.

Nous avons dit que les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ doivent vérifier certaines relations linéaires, celles-ci sont vérifiées par A_k, A'_k donc nous serons certains d'avoir bien choisis les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ si nous les astreignons à vérifier *toute* relation linéaire du type considéré que

vérifient les A_k, A'_k. Les $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ doivent vérifier les relations linéaires homogènes à coefficients entiers résultant de l'élimination des $\bar{l}_n, \bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}'_n$ entre $(\bar{2})$ et $(\bar{2}')$, relations qui sont toutes vérifiées par L_k et L'_k, donc:

A. Si D et D' sont éq. de f. f., à chacun de leurs dièdres on peut attacher un nombre rationnel r_k ou r'_k tel que l'on ait la relation $(\bar{7})$ pour toute solution $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ des équations $(\mathcal{L})$ linéaires homogènes à coefficients entiers et qui sont vérifiées par L_k, L'_k, et par toute solution $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$ des équations $(\mathcal{A})$ linéaires, à coefficients entiers, dont le second membre est un nombre entier de fois π, et qui sont vérifiées par A_k, A'_k [1]).

A cet énoncé, adjoignons-en deux autres qu'on aurait obtenu, le premier en ne remplaçant pas a_m, A_k, A'_k par des variables, le second en ne faisant que ce remplacement.

B. Si D et D' sont éq. de façon finie, on a la relation:

$$(\bar{8}) \qquad \sum \bar{L}_k(A_k - r_k\pi) = \sum \bar{L}'_k(A'_k - r'_k\pi),$$

pour toute solution des équations $(\mathcal{L})$.

C. Si D et D' sont éq. de f. f., on a la relation:

$$(\bar{9}) \qquad \sum L_k(\bar{A}_k - r_k\pi) = \sum L'_k(\bar{A}'_k - r'_k\pi),$$

pour toute solution des équations $(\mathcal{A})$.

En apparence ces énoncés sont plus particuliers que *A*, en réalité, ils sont équivalents. Supposons, en effet, que la condition $(\bar{8})$ soit vérifiée. La solution la plus générale des $(\mathcal{L})$ est une combinaison linéaire homogène d'un certain nombre p de solutions rationnelles $\mathcal{L}_{k,1}, \mathcal{L}'_{k,1}; \mathcal{L}_{k,2}, \mathcal{L}'_{k,2}; \ldots; \mathcal{L}_{k,p}, \mathcal{L}'_{k,p}$ et pour chacune de ces solutions on a donc:

$$(10) \qquad \sum \mathcal{L}_{k,i}(A_k - r_k\pi) = \sum \mathcal{L}'_{k,i}(A'_k - r'_k\pi).$$

---

[1]) Les équations $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ sont en nombre infini, mais il suffit d'écrire un système arithmétiquement complet de ces équations, c'est-à-dire tel que toute autre équation $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ soit une combinaison linéaire à coefficients rationnels de celles écrites.

Or ceci est une relation linéaire homogène entre les A_k, A'_k et π qu'on pourrait écrire avec des coefficients entiers, elle fournit donc une des équations ($\mathcal{A}$), donc on a aussi:

$$\sum \mathfrak{L}_{k,i}(\bar{A}_k - r_k\pi) = \sum \mathfrak{L}'_{k,i}(\bar{A}'_k - r'_k\pi).$$

Et, par combinaison linéaire homogène de ces p relations, on obtient la relation (7).

On démontrera de même que C est équivalent à A en remarquant que la solution la plus générale des ($\mathcal{A}$) s'obtient à partir d'un certain nombre q d'entre elles, qui sont commensurables avec π, comme combinaison linéaire homogène et dont la somme des coefficients est un de ces q solutions particulières.

La généralité de A étant apparente, utilisons l'énoncé B. Il fournit les p relations (10); chacune d'elles s'écrit encore

$$\sum \mathfrak{L}_{k,i} A_k - \sum \mathfrak{L}'_{k,i} A'_k = R_i \pi, \tag{11}$$

R_i étant rationnel et donné par

$$\sum \mathfrak{L}'_{k,i} r'_k - \sum \mathfrak{L}_{k,i} r_k = R_i. \tag{12}$$

Mais les p systèmes de nombres $\mathfrak{L}_{k,i}, \mathfrak{L}'_{k,i}$ étant linéairement indépendants, comme système fondamental de solutions des ($\mathfrak{L}$), les relations (12) donnent des nombres rationnels r_k, r'_k quelles que soient les valeurs rationnelles que l'on donnera aux R_k. Donc on peut remplacer les p relations (10) par les p relations (11) avec la seule mention que les R_i doivent être rationnels. Or, s'il en est ainsi, toute solution rationnelle des ($\mathfrak{L}$), étant combinaison linéaire homogène à coefficients rationnels des $\mathfrak{L}_{k,i}, \mathfrak{L}'_{k,i}$, fournira une relation de la forme (11). D'où l'énoncé de M. Dehn, équivalent aux précédents:

D. *Si D et D' sont éq. de f. f., pour toute solution rationnelle des équations ($\mathfrak{L}$), on a une relation*

$$\sum (\bar{L}_k)_r A_k - \sum (\bar{L}'_k)_r A'_k = R\pi, \tag{13}$$

R étant rationnel.

Les énoncés A, B, C, D sont donc équivalents; si, par exemple, l'énoncé de M. Dehn ne parle que des équations ($\mathfrak{L}$) comme il oblige à reconnaitre si la relation (13) est ou non vérifiée, c'est-à-dire si elle est ou non une des relations ($\mathcal{A}$) il suppose

donc aussi en réalité, des connaissances relatives aux équations $(\mathcal{A})$. C'est pourquoi j'ai préféré donner tout d'abord un énoncé qui montre que les rôles des $(\mathcal{L})$ et des $(\mathcal{A})$ sont parallèles, mais il fallait aussi que je mette en garde contre la généralité, plus apparente que réelle, de cet énoncé A.

Imaginons que nous sachions effectivement former les $(\mathcal{L})$ et les $(\mathcal{A})$, alors nous trouverons, comme il a été dit, les $\bar{L}_k, \bar{L}'_k$ par des formules

$$\bar{L}_k = t_1 \mathcal{L}_{k,1} + t_2 \mathcal{L}_{k,2} + \ldots + t_p \mathcal{L}_{k,p}, \qquad \bar{L}'_k = t_1 \mathcal{L}'_{k,1} + t_2 \mathcal{L}'_{k,2} + \ldots + t_p \mathcal{L}'_{k,p}$$

et les A_k, A'_k par des formules

$$\bar{A}_k = \pi(\mathcal{A}_{k,0} + \theta_1 \mathcal{B}_{k,1} + \ldots + \theta_q \mathcal{B}_{k,q}), \qquad \bar{A}'_k = \pi(\mathcal{A}'_{k,0} + \theta_1 \mathcal{B}'_{k,1} + \ldots + \theta_q \mathcal{B}'_{k,q})$$

les t et θ étant des paramètres arbitraires, les $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ étant rationnels comme les $\mathcal{L}_{k,i}$, $\mathcal{L}'_{k,i}$, les $\mathcal{B}_{k,i}, \mathcal{B}'_{k,i}$ donnant un système fondamental de solutions des équations homogènes $(\mathcal{B})$ déduites des $(\mathcal{A})$ en y remplaçant π par zéro.

Si nous portons ces expressions dans $(\bar{7})$ nous avons les p relations

$$\sum \mathcal{L}_{k,i}(\mathcal{A}_{k,0} - r_k) = \sum \mathcal{L}'_{k,i}(\mathcal{A}'_{k,0} - r'_k)$$

qui s'écrivent encore

$$\sum \mathcal{L}_{k,i}\mathcal{A}_{k,0} - \sum \mathcal{L}'_{k,i}\mathcal{A}'_{k,0} = \mathcal{R}_i \pi,$$

les $\mathcal{R}_i$ étant rationnels, et les pq relations [1])

$$\sum \mathcal{L}_{k,i}\mathcal{B}_{k,j} - \sum \mathcal{L}'_{k,i}\mathcal{B}'_{k,j} = 0.$$

Mais si nous avions utilisé l'énoncé de M. DEHN, par exemple, les mêmes relations se seraient immédiatement aussi présentées à nous car les $\mathcal{A}_k, \mathcal{A}'_k$ s'obtiennent en donnant aux θ des valeurs qui doivent être arithmétiquement indépendantes linéairement; sans quoi, en effet, les A_k, A'_k vérifieraient une relation de la forme $(\mathcal{A})$ que ne vérifieraient pas tous les $\bar{A}_k, \bar{A}'_k$, ce qui est absurde. Dès lors, en portant ces expressions des

[1]) Ces relations ont été écrites pour la première fois par M. O. Nicoletti qui, dans ses recherches, a aussi mis en évidence le parallélisme des rôles des systèmes $(\mathcal{L})$ et $(\mathcal{A})$ (Rend. della R. Acc. d. Lincei. 1-er sem. 1913. Rend. del Circ. Mat. di Palermo 1-er sem. 1914 et 2-e sem. 1919).

A_k, A'_k dans la relation (13) nous aurions bien nos mêmes $p(q+1)$ relations.

Ainsi, non seulement tous les énoncés sont équivalents théoriquement, mais ils le sont pratiquement car ils conduisent aux mêmes calculs.

Je ne me suis occupé que de l'équivalence simple. Le passage à l'équivalence par multiplication est immédiat; pour l'équivalence par différence, nous raisonnerons, avec M. DEHN, comme il suit:

Soient $\varDelta$ et $\varDelta'$ deux systèmes de polyèdres éq. de f. f. simple ou par multiplication et supposons que $D+\varDelta$ et $D'+\varDelta'$ soient aussi éq. de f. f. simple ou par multiplication. Nous aurons à considérer trois systèmes d'équations ($\mathfrak{L}$), celui relatif à la comparaison de $\varDelta$ et $\varDelta'$, soit $(\mathfrak{L})_\varDelta$, celui relatif à la compaaiso n de $D+\varDelta$ et $D'+\varDelta'$, soit $(\mathfrak{L})_{D+\varDelta}$ et celui relatif à la comparaison de D et D', soit $(\mathfrak{L})_D$.

Pour que des $\bar{L}_i$ et $\bar{L}_j$ relatifs aux dièdres de D et D' appartiennent à une solution des $(\mathfrak{L})_{D+\varDelta}$ il faut qu'ils vérifient les équations obtenues en éliminant dans les $(\mathfrak{L})_{D+\varDelta}$ les $\bar{L}_i, \bar{L}_j$ relatifs à $\varDelta$ et $\varDelta'$, équations qui font partie des $(\mathfrak{L})_D$, qui sont même les $(\mathfrak{L})_D$ car toute équation $(\mathfrak{L})_D$ appartient évidemment aux $(\mathfrak{L})_{D+\varDelta}$. Raisonnant de même les $(\mathfrak{L})_\varDelta$ remplaçant les $(\mathfrak{L})_D$, on voit que toute solution des $(\mathfrak{L})_{D+\varDelta}$ est formée par l'association d'une solution des $(\mathfrak{L})_D$ qu'on peut prendre arbitraire avec une solution convenablement choisie des $(\mathfrak{L})_\varDelta$.

Donc, à une solution rationnelle des $(\mathfrak{L})_D$, il suffit d'adjoindre une solution rationnelle convenable des $(\mathfrak{L})_\varDelta$ pour avoir une solution rationnelle des $(\mathfrak{L})_{D+\varDelta}$; mais ceci nous donnera

$$(13)_\varDelta \qquad \sum(\bar{L}_k)_r A_k - \sum(\bar{L}'_k)_r A'_k = R\pi,$$

entre les éléments de $\varDelta$ et $\varDelta'$;

$$(13)_{D+\varDelta} \qquad \sum(\bar{L}_k)_r A_k - \sum(\bar{L}'_k)_r A'_k = S\pi,$$

entre les éléments de $D+\varDelta$ et $D'+\varDelta'$; d'où par différence,

$$(13)_D \qquad \sum(\bar{L}_k)_r A_k - \sum(\bar{L}'_k)_r A'_k = (R-S)\pi,$$

entre les éléments de D et D'. D'où l'énoncé D, et par suite aussi les énoncés A, B, C pour l'équivalence générale.

Note II

Démontrons la proposition utilisée dans le texte: *les seuls nombres de la forme* $\pm\sqrt{r}$, *où r est rationnel, qui sont égaux à la tangente d'un arc commensurable avec* π, *sont* $0, \pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ecrivons r sous forme irréductible m/n; nous supposerons d'abord que l'un des deux nombres m et n, premiers entre eux, admette un facteur premier p, autre que 3. Et puisque, si m/n était la tangente d'un arc commensurable avec π, il en serait de même de n/m, supposons que p divise m. Et montrons qu'on ne peut avoir

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{2N} = \operatorname{tg} x$$

k et N étant entiers. L'expression de $\operatorname{tg} 2Nx$ en fonction de $\operatorname{tg} x$ nous donnerait, à l'aide des coefficients binomiaux C_{2N}^{l},

$$0 = C_{2N}^{1}\operatorname{tg} x - C_{2N}^{3}\operatorname{tg}^{3} x + \ldots \pm C_{2N}^{2N-1}\operatorname{tg}^{2N-1} x$$

ou, en divisant par $\operatorname{tg} x$ et en multipliant par n^{N-1}

$$0 = 2N \cdot n^{N-1} - \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2}}{3} m\, n^{N-2} - \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{4}}{5} m^{2} n^{N-3} + \ldots$$

$$+ \ldots \pm \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2k}}{2k+1} m^{k} n^{N-k-1} + \ldots \pm 2N m^{N-1}.$$

m contient p à une puissance positive α, n ne le contient pas, $2N$ le contient à une puissance β positive ou nulle. Le premier terme du second membre contient donc p exactement à la puissance β; le second terme le contient à la puissance α à cause du facteur m et à la puissance β au moins à cause de $C_{2N}^{3} = \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2}}{3}$ puisque, p étant différent du dénominateur 3, C_{2N}^{3} admet le facteur p au moins autant de fois que $2N$. Pour les mêmes raisons, le terme

$$C_{2N}^{2k+1} m^{k} n^{N-k-1} = \frac{2N \cdot C_{2N-1}^{2k}}{2k+1} m^{k} n^{N-k-1}$$

admet p au moins à la puissance $ka+\beta$, tant que p ne divise pas le dénominateur $2k+1$ et au moins à la puissance $ka+\beta-\gamma$ si p est à la puissance γ dans $2k+1$. Mais alors p n'est pas égal à 2, il est au moins égal à 5, et de plus on a:

$$2k+1 \geqslant p^\gamma \geqslant 5^\gamma \geqslant 5\gamma, \qquad \gamma \leqslant \frac{2k+1}{5} < k \leqslant ka.$$

Donc p est contenu dans le terme examiné plus de β fois. L'égalité envisagée est donc impossible, puisqu'au second membre tous les termes, sauf le premier, seraient divisibles par $p^{\beta+1}$; le théorème est démontré pour le cas envisagé.

Il nous reste à examiner le cas où l'un des deux nombres m et n est une puissance de 3 supérieure à la première et où l'autre est égal à 1. Soit $m=3^a$, $a \geqslant 2$; $n=1$. β et γ ayant les mêmes significations que plus haut, on aura cette fois

$$2k+1 \geqslant 3^\gamma \geqslant 3\gamma, \qquad \gamma \leqslant \frac{2k+1}{3} \leqslant k < ka.$$

Le théorème est donc aussi prouvé pour ce cas, et l'on voit en même temps comment s'introduit le cas exceptionnel $p=3$, $a=1$ indiqué par l'énoncé.

Ce mode de raisonnement [1]) est susceptible de fournir des résultats plus généraux, mais moins simples et que je ne puis développer ici, relatifs par exemple à d'autres irrationnelles, $\sqrt[3]{r}$ ou $a+b\sqrt[2]{r}$, par exemple.

Le raisonnement par lequel, dans le texte, on a formé toutes les équations ($\mathcal{A}$) pour le cas des polyèdres réguliers peut aussi être utilisé dans des cas beaucoup plus généraux. Il suffira ici de donner cet énoncé: *si l'on a des angles* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *dont les tangentes ne sont égales ni à* 0, *ni à* ± 1, *ni à* $\pm\sqrt{3}$, *ni à* $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, *et ont des expressions de la forme* $\operatorname{tg} A_i = \sqrt{r_i}$, r_i *étant rationnel, si, de plus, chaque* r_i, *à partir de* $i=2$ *contient à son numérateur ou à son dénominateur un facteur premier à une*

[1]) C'est celui que M. H. G. Forder, dans son ouvrage: *The Foundations of euclidean Geometry*, utilise pour le cas particulier de $T=2\sqrt{2}$, d'après une suggestion de M. R. Cooper.

puissance impaire et que ce facteur ne se trouve à une puissance impaire dans aucun terme de $r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}$, il n'existe entre les A et π aucune relation à coefficients entiers.

En effet, une relation

$$\operatorname{tg}[2n_1 A_1 + 2n_2 A_2 + \ldots + 2n_u A_u] = 0,$$

entraînerait entre les $\sqrt{r_i}$ une relation linéaire par rapport à *chacun* de ces radicaux et à coefficients rationnels en tant que relation multilinéaire, ce qui est impossible.

SUR LES POINTS ZÉROS DES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

Par F. LEJA, Kraków

Désignons par R_k l'espace de $k \geqslant 1$ variables complexes et par $\{P_n\}$ une suite de points différents quelconques de R_k tendant vers l'origine des coordonnées 0.

Je dirai qu'une suite $\{P_n\}$ de R_k est une *suite de Carathéodory*, ou qu'elle est *du type C*, si chaque fonction analytique de k variables complexes, régulière au voisinage du point 0, s'annule identiquement lorsqu'elle s'annule en presque tous les points P_n.

On sait que chaque suite $\{P_n\}$ du plan R_1 est du type C et que cette proposition n'est pas vraie dans le cas de l'espace R_k, où $k \geqslant 2$ [1]). Néanmoins, il existe dans chaque espace R_k des suites $\{P_n\}$ du type C. De telles suites ont été construites par C. CARATHÉODORY [2]).

Je vais donner une condition suffisante très simple pour qu'une suite $\{P_n\}$ de l'espace R_2 soit du type C. Nous désignerons par (x, y) les coordonnées d'un point variable dans R_2 et par (x_n, y_n) celles du point P_n.

Chaque suite $\{x_n, y_n\}$, où $|x_n| + |y_n| > 0$, tendant vers l'origine des coordonnées est une suite de Carathéodory si la suite

$$(1) \qquad \{y_n / x_n\}$$

a une infinité de points d'accumulation.

---

[1]) Par exemple, la fonction $f(x, y) = -x + y^2$ n'est pas identiquement nulle bien qu'elle s'annule aux points P_n des coordonnées $x = x_n^2$, $y = x_n$, quel que soit $x_n \to 0$.

[2]) Journal für Mathem., t. 165 (1931), p. 180—183.

Démonstration. Soit $f(x,y)$ une fonction analytique, développable en une série double

$$f(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu} \tag{2}$$

absolument convergente dans un domaine

$$|x|+|y|\leqslant\delta, \qquad \text{où } \delta>0, \tag{3}$$

et remplissant la condition $f(x_n,y_n)=0$, pour $n>N$. La série simple

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n,0}x^{n}+a_{n-1,1}x^{n-1}y+\ldots+a_{0,n}y^{n})=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,y)$$

converge uniformément dans le domaine (3) et l'on a dans ce domaine

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,y). \tag{4}$$

Puisque $f(x_n,y_n)$ tend vers $f(0,0)=a_{00}$ on doit avoir $a_{00}=0$. Supposons que tous les coefficients $a_{\mu\nu}$ pour $\mu+\nu<k$ soient nuls et que le polynôme

$$v_k(x,y)=x^k\cdot v_k(1,y/x)$$

ne soit pas nul identiquement. Comme le polynôme $v_k(1,z)$ de la variable z n'a que k zéros au plus il existe parmi les points d'accumulation $\alpha,\beta,\ldots$ de la suite (1) un point fini a tel qu'on a

$$v_k(1,a)\neq 0. \tag{5}$$

Soit $\{x'_n,y'_n\}$ une suite partielle de $\{x_n,y_n\}$ pour laquelle $y'_n/x'_n=a_n\to a$ et soit $r>0$ un nombre tel qu'on ait $|a|<r$. Il est clair que si $n>N$, où N est un nombre suffisamment grand, on a $|a|<r$ et les points (x'_n,y'_n) appartiennent au domaine (3), donc la série

$$f(x'_n,y'_n)=x'^k_n[v_k(1,a_n)+x'_n\cdot v_{k+1}(1,a_n)+x'^2_n\cdot v_{k+2}(1,a_n)+\ldots.]$$

converge pour $n>N$, et comme $fx'_n,y'_n)=0$ et $x'_n\neq 0$, car a est fini, on a pour $n>N$

$$v_k(1,a_n)+x'_n\cdot v_{k+1}(1,a_n)+x'^2_n\cdot v_{k+2}(1,a_n)+\ldots=0. \tag{6}$$

Mais toutes ces égalités ne peuvent pas se produire dans l'hypothèse (5). En effet, on a $\lim\limits_{n\to\infty} v_k(1, a_n) = v_k(1, a) \neq 0$ et nous allons voir que la somme

$$\varphi_n(x'_n) = x'_n v_{k+1}(1, a_n) + x'^2_n v_{k+2}(1, a_n) + \ldots$$

tend vers zéro avec $1/n$. Posons dans ce but

$$V_n(xy) = |a_{n,0} x^n| + |a_{n-1,1} x^{n-1} y| + \ldots + |a_{0n} y^n|$$

et observons que la série $\sum V_n(xy)$ converge dans le domaine (3), donc la série entière simple en x

$$x^k[V_k(1, r) + x V_{k+1}(1, r) + x^2 V_{k+2}(1, r) + \ldots]$$

converge dans le cercle

$$|x| + r|x| < \delta, \quad \text{ou} \quad |x| < \delta/1 + r.$$

Par suite la somme

$$\Phi(x) = |x| \cdot V_{k+1}(1, r) + |x|^2 \cdot V_{k+2}(1, r) + \ldots$$

tend vers zéro avec x et comme $|a_n| < r$ pour $n > N$ on a pour $n > N$ et $m \geqslant k$ $|v_m(1, a_n)| \leqslant V_m(1, r)$ et par conséquent

$$|\varphi_n(x'_n)| \leqslant \Phi(x'_n)$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x'_n) = 0$.

L'hypothèse que les polynômes $v_n(x, y)$ ne sont pas tous nuls identiquement conduit donc à une contradiction, et par suite notre proposition est démontrée.

Observons que, si la suite (1) n'a qu'un nombre fini des points d'accumulation, la suite correspondante $\{x_n, y_n\}$ ne jouit pas nécessairement de la propriété C. Par exemple, la fonction

$$f(x, y) = (y - a_0 x)(y - a_1 x) \ldots (y - a_{p-1} x)$$

s'annule aux points de la suite $\{x_n, y_n\}$, si $y_n = a_j x_n$, pour $n = p\nu + j$, $0 \leqslant j < p$, $\nu = 0, 1, \ldots$; la suite correspondante $\{y_n / x_n\}$ n'a ici que p points d'accumulation.

La proposition précédente peut être étendue aux suites $\{P_n\}$ de l'espace R_k à un nombre quelconque de dimensions. Nous désignerons par $(x, y, z, \ldots, u)$ les coordonnées d'un point variable dans R_k et par $(x_n, y_n, z_n \ldots u_n)$ celles du point P_n.

Je dirai qu'un ensemble E de points de R_k *jouit de la propriété* P si chaque polynôme de k variables complexes (non identiquement nul) est différent de zéro en un point au moins de E. Ceci posé, on peut démontrer la proposition suivante que j'énoncerai pour le cas $k=3$:

Chaque suite de points $\{x_n, y_n, z_n\}$, *dont une des coordonnées au plus est égale à zéro, tendant vers l'origine des coordonnées est une suite de Carathéodory si l'ensemble des points d'accumulation de la suite*

$$\{y_n/x_n,\ z_n/x_n\}$$

jouit dans l'espace R_2 *de la propriété* P.

La démonstration est analogue à la précédente.

SUR LA NOTION DE COLLECTIF

Par JAN HERZBERG, Lwów

Introduction

M. A. WALD [1]) a précisé la notion de collectif à l'aide de la notion généralisée du procédé de choix, ce qui lui a permis de donner la démonstration effective de l'existence des collectifs, sans recourir à des axiomes spéciaux quelconques [2]). Ce résultat a frayé la voie à la résolution complète du problème des fondements de la théorie des collectifs, amorcée par M. R. v. MISES [3]). La méthode de M. WALD a cependant ce point faible qu'elle relativise la notion de collectif. Un ensemble dénombrable S de procédés de choix étant donné, il existe alors des *collectifs relativement à* S. De cette manière la théorie perd le contact avec la réalité, puisqu'elle ne donne aucune indication si un procédé de choix pratiquement donné appartient ou non à S.

Une résolution complète de cette difficulté estdonnée par la *théorie des types logiques* dans sa façon *pure* (c.-à-d. sans l'axiome de réductibilité). Dans chaque système logique basé sur la pure théorie des types on peut concrétiser l'idée de M. WALD. Il suffit de poser pour l'ensemble indéterminé S l'ensemble de *tous* les procédés de choix *d'un certain type logique*, c'est à dire un ensemble *dénombrable* assez large pour contenir tout procédé de choix qui pourrait apparaître en pratique. Alors la

[1]) A. Wald, *Sur la notion de collectif dans le calcul des probabilités*, Comptes rendus, 202 (1936).

[2]) A. Wald, *Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Heft 8, Wien 1937.

[3]) R. v. Mises, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeitschr. 5 (1919).

notion générale de collectif peut être définie sur l'étage typical suivant. Cette méthode de construction reproduit parfaitement le caractère „irrégulier", et pourtant déterminé, du collectif.

En particulier un système de la *sémantique théorie des types* qui réalise de la plus simple manière les principes de la pure théorie des types, est convenable pour servir de base au calcul des collectifs. Un nouveau modèle du système de la sémantique théorie des types a été donné récemment par MM. L. Chwistek et W. Hetper [4]). En m'appuyant sur ce dernier travail je reconstruis la notion de collectif selon la méthode esquissée plus haut.

I. Construction des notions auxiliaires

1. Classes et relations. Nous introduisons une petite modification dans la théorie des classes et des relations, développée par MM. Chwistek et Hetper [5]), pour simplifier la notation. Au lieu des abréviations données à la page 31 de *New Foundation*, nous admettons les suivantes:

$\mathrm{Cl}[NML]XEHA$	est une abrév. de	$\wedge = E * a_{NM} H[\cdot 0(L)]$ $\wedge \{H a_{NM}\}[\cdot 0(L)](H a_{NM} X A)[\cdot 0(L)]$
$\mathrm{Cls}[NML]EH$	„	$/\!/[NL]x_{NL} \exists [ML] a_{ML} \mathrm{Cl}[NML]x_{NL} E H a_{ML}$
$\mathrm{Class}[NML]E$	„	$\exists [ML] h_{ML} \mathrm{Cls}[NML] E h_{ML}$
$\epsilon[NML]XE$	„	$\exists [ML] h_{ML} a_{ML} \wedge \mathrm{Cl}[NML] X E h_{ML} a_{ML} a_{ML}$
$\mid[NML]EFG$	„	$\wedge \mathrm{Class}[NML]E \wedge \mathrm{Class}[NML]F$ $\wedge \mathrm{Class}[NML]G /\!/[NL]x_{NL}$ $\equiv \epsilon[NML]x_{NL}E \mid \epsilon[NML]x_{NL}F \epsilon[NML]x_{NL}G$

Les opérations de négation, d'addition, de multiplication, ainsi que les notions d'inclusion et d'égalité des classes peuvent être obtenues sans difficulté à l'aide de la notion précédente $\mid[NML]EFG$.

Nous introduisons encore:

$\vee_{NM}$	comme abréviation de	$* a_{NM} = a_{NM} a_{NM} [\cdot 0(M)]$	(la classe pleine).
$\wedge_{NM}$	„ „	$* a_{NM} \sim = a_{NM} a_{NM} [\cdot 0(M)]$	(la classe vide).

[4]) L. Chwistek et W. Hetper, *New foundation of formal metamathematics*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 3, Numb. 1.

[5]) l. c. chapitre VI, paragraphe 2.

On voit que nos classes ne sont plus, comme elles l'étaient chez MM. CHWISTEK et HETPER, des *propositions* obtenues du schéma $//[NM]a_{NM}H$, mais seulement des *expressions* obtenues du schéma $*a_{NM}H$, H contenant la variable apparente a_{NM}. Grâce à cette modification il a été possible de réduire les exigences typicales dans les abréviations $\mathrm{Cls}[NML]EH$ et $\epsilon[NML]XE$.

Nous introduisons maintenant une modification analogue dans la théorie élémentaire des relations. Nous admettons les abréviations suivantes:

$\mathrm{Rl}[PQML]XYEGHA$	est une abrev. de	$\wedge = E * a_{1QM} * a_{PM} G[\cdot 0(L)] \wedge \{Ga_{PM}\}[\cdot 0(L)]$ $\wedge \{Ga_{1QM}\}[\cdot 0(L)] \wedge (Ga_{1QM}YH)[\cdot 0(L)$ $(Ha_{PM}XA)[\cdot 0(L)$
$\mathrm{Rel}[PQML]EG$	„	$//[PL]x_{PL}//[QL]y_{QL} \exists [ML]a_{ML}h_{ML}$ $\mathrm{Rl}[PQML]x_{PL}y_{QL}EGh_{ML}a_{ML}$
$\mathrm{Relat}[PQML]E$	„	$\exists [ML]g_{ML}\,\mathrm{Rel}[PQML]Eg_{ML}$
$\mathrm{rel}[PQML]XEY$	„	$\exists [ML]g_{ML}h_{ML}a_{ML}$ $\wedge\, \mathrm{Rl}[PQML]XYEg_{ML}h_{ML}a_{ML}a_{M}$
(D∍)$[PQML]XE$	„	$\exists [QL]y_{QL}\,\mathrm{rel}[PQML]XEy_{QL}$
(Ɑ∍)$[PQML]EY$	„	$\exists [PL]x_{PL}\,\mathrm{rel}[PQML]x_{PL}EY$
$(\mathrm{Cls}\rightarrow 1)[PQML]E$	„	$\wedge\, \mathrm{Relat}[PQML]E//[PL]x_{PL}//[QL]y_{QL}z_{QL} \supset \wedge$ $\mathrm{rel}[PQML]x_{PL}Ey_{QL}\,\mathrm{rel}[PQML]x_{PL}Ez_{QL}$ $= y_{QL}z_{QL}[\cdot 0(L)$
$(1\rightarrow \mathrm{Cls})[PQML]E$	„	$\wedge\, \mathrm{Relat}[PQML]E//[PL]x_{PL}z_{PL}//[QL]y_{QL} \supset \wedge$ $\mathrm{rel}[PQML]x_{PL}Ey_{QL}\,\mathrm{rel}[PQML]z_{PL}Ey_{QL}$ $= x_{PL}z_{PL}[\cdot 0(L)$
$(1\rightarrow 1)[PQML]E$	„	$\wedge (\mathrm{Cls}\rightarrow 1)[PQML]E(1\rightarrow \mathrm{Cls})[PQML]E$
$\uparrow[(PQR)ML]EFG$	„	$\wedge\, \mathrm{Relat}[PQML]E \wedge \mathrm{Relat}[QRML]F \wedge$ $\mathrm{Relat}[PRML]G//[PL]x_{PL}//[RL]z_{RL} =$ $\mathrm{rel}[PRML]x_{PL}Gz_{RL} \exists [QL]y_{Q}$ $\wedge\,\mathrm{rel}[PQML]x_{PL}Ey_{QL}\,\mathrm{rel}[QRML]y_{QL}Fz_{RL}$

2. Arithmétique des nombres naturels et rationnels. Notre construction sera faite dans le système élémentaire $\models[60]c$. Nous commençons par l'arithmétique des nombres naturels et rationnels et nous la construisons sur l'étage typical suprême suivant la méthode de M. HETPER[6]), appliquée aussi par

[6]) W. Hetper, *Arytmetyka semantyczna*, Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol. 27 (1934).

MM. Chwistek et Hetper dans leur *New foundation* [7]). Nous admettons notamment:

$\mathrm{Nat}[NM]E$	*est une abrév. de*	$({*}EE\cdot 1(N)\cdot 0(N)E)[\cdot 0(M)]$
$\mathrm{Nat}E$	„ „ „ „	$\mathrm{Nat}[65]E$
$=EF$	„ „ „ „	$\wedge \mathrm{Nat}E \wedge \mathrm{Nat}F = EF[6]$
$<EF$	„ „ „ „	$\wedge \mathrm{Nat}E \wedge \mathrm{Nat}F\{E * FF\}[6].$

La notion $\mathrm{Nat}E$ correspond à celle de $\mathrm{integ}E$ de *New foundation*. Nous introduisons encore des nombres naturels constants:

$0'$ *est une abrév. de* $\cdot 0(6)$, $1'$ *est une abrév. de* $\cdot 1(6)$, etc...

Nous acceptons maintenant les définitions des opérations arithmétiques d'addition, de multiplication, d'exponentiation des nombres naturels, telles qu'elles sont données dans *New foundation* [8]), en y faisant seulement des modifications typicales nécessaires. Pour obtenir ces opérations arithmétiques, on pourrait se servir aussi de la méthode plus générale des *fonctions ancestrales*, donnée par M. W. Hetper dans un récent travail [9]).

Nous passons à l'arithmétique des nombres rationnels non-négatifs. Ces derniers seront des paires de nombres naturels, appartenants au schéma ${*}I(E)0(F)$, où $\neq F0'$. Nous admettons en général:

$\dfrac{E}{F}$	est une abrév. de	${*}I(E)0(F)$
$\mathrm{Rat}[NM]E$	„ „	$\exists[NM]p_{NM}q_{NM} \wedge \mathrm{Nat}[NM]p_{NM} \wedge \mathrm{Nat}[NM]q_{NM}$
		$\wedge \sim = q_{NM}\cdot 0(N)[\cdot 0(M)] = E\dfrac{p_{NM}}{q_{NM}}[\cdot 0(M)]$
$\mathrm{Rat}E$	„ „	$\mathrm{Rat}[65]E.$

Les relations entre les nombres rationnels non-négatifs telles que $\underset{r}{=}EF$ (égalité), $\underset{r}{<}EF$, $\underset{r}{\leqslant}EF$, $\underset{r}{>}EF$, $\underset{r}{\geqslant}EF$ (inégalités), $\underset{r}{+}EFG$ (addition), $\underset{r}{\times}EFG$ (multiplication) peuvent être définies de la manière bien connue.

---

[7]) chapitre VI, paragraphe 1.

[8]) page 30.

[9]) W. Hepter, *Relacje ancestralne w systemie semantyki*, Archiwum Tow. Nauk. we Lwowie, Classe III, vol. IX, pp. 265-280.

3. Arithmétique des nombres réels. Il nous suffira pour nos buts d'introduire des nombres réels non-négatifs d'un seul type logique. Nous admettons comme nombres réels des classes du type 5, non vides et bornées, de nombres rationnels non-négatifs:

$\mathrm{Real}[NML]E$	est une abrév. de	$\wedge \mathrm{Class}[NML]E \,\exists[NL]x_{NL}y_{NL}$ $\wedge \epsilon[NML]x_{NL}E \wedge \mathrm{Rat}[NM]y_{NL}$ $\Pi[NL]z_{NL} \supset \epsilon[NML]z_{NL}E \underset{r}{<} z_{NL}y_{NL}$
$\mathrm{Real}\,E$	„ „	$\mathrm{Real}[654]E$.

A titre d'exemple nous introduisons de *nouveaux nombres rationnels*:

$$(\mathrm{H}) \quad \textit{est une abréviation de} \quad *a_{65} \underset{r}{=} a_{65}H.$$

Quant aux nombres irrationnels, nous en aurons sans difficulté, tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, e, π, et autres, nécessaires en pratique.

Les notions arithmétiques d'égalité $(\underset{q}{=}EF)$ et d'inégalité $(\underset{q}{<}EF$, $\underset{q}{\leqslant}EF$ etc.) ne suscitent aucune difficulté et sont à définir de la manière ordinaire. Remarquons cependant que l'addition et la multiplication des nombres réels ne peuvent être définies directement sans baisser le type logique. Nous évitons cette difficulté en employant la même méthode de description qui a été appliquée déjà pour définir les notions analogues dans l'arithmétique des nombres naturels et rationnels. C'est à dire que nous introduisons les notions $\underset{q}{+}EFG$, $\underset{q}{\times}EFG$, qui précisent les conditions dans lesquelles le nombre G peut être considéré comme somme ou produit des nombres E, F.

4. Théorie de la mesure. M. WALD a montré [10]) que dans le problème des probabilités continues de la théorie des collectifs on peut attribuer à tout ensemble mesurable au sens PEANO-JORDAN une probabilité déterminée. Il est cependant impossible d'attribuer la probabilité (c.-à-d. la limite de fréquence) à tous les ensembles mesurables au sens de M. LEBESGUE. C'est pourquoi nous pouvons nous borner ici, sans

[10]) l. c., théorèmes II, III, et IV.

perte de généralité, à la théorie de la mesure PEANO-JORDAN qui est tout à fait élémentaire. Nous pouvons introduire d'abord par la méthode des *fonctions ancestrales* de M. HETPER[11]), la notion de la somme finie des segments aux extrémités rationnelles et de la longueur des ensembles, égaux à de telles sommes. Ensuite nous introduisons par la méthode ordinaire la notion de la mesure intérieure (P-J) et de la mesure extérieure (P-J) d'un ensemble quelconque F de nombres réels, et enfin la notion de *mesurabilité* (au sens P-J) de l'ensemble F, qui sera abrégée mens F, ainsi que la notion de la mesure (P-J).

5. Relations à plusieurs membres. MM. BIRNBAUM et SCHREIER[12]) et indépendamment aussi M. WALD[13]) ont introduit la notion généralisée du procédé de choix. Ces auteurs appellent *procédé de choix* une suite quelconque de fonctions (dites de choix):

$$f_0, f_1(e_1), f_2(e_1 e_2), \ldots, f_k(e_1 e_2 \ldots e_k), \ldots \text{ ad inf,}$$

où la k-ième fonction de choix $f_k(e_1 e_2 \ldots e_k)$ est une fonction à k arguments qui fait correspondre à tout groupe ordonné de k événements (chez nous les événements s'exprimeront toujours par des nombres réels) le nombre 0 ou le nombre 1. Il est clair qu'on peut remplacer ici des fonctions de choix à k arguments par des relations k-tuples, ce qui simplifie la définition. Nous voyons maintenant la nécessité de construire une théorie des relations à plusieurs membres. Pour exécuter cette tâche nous nous servirons de la méthode des *fonctions ancestrales* de M. HETPER[14]). Cette méthode permet de construire une certaine proposition nouvelle $\Phi(Y_1 Y_2 \ldots Y_m)$, en partant de deux propositions données: $A(Y_1 Y_2 \ldots Y_m)$ (que nous appellerons *fonction initiale*) et

$$B(X_1^1 X_2^1 \ldots X_m^1, X_1^2 \ldots X_m^2, \ldots, X_1^n \ldots X_m^n; Y_1 \ldots Y_m)$$

---

[11]) l. c. [9]).

[12]) Z. W. Birnbaum et J. Schreier, *Eine Bemerkung zum starken Gesetz der grossen Zahlen*, Studia Mathematica, IV (1933).

[13]) l. c. [1]).

[14]) l. c. [9]).

(qui sera appelée *fonction transitive*). Cette proposition $\Phi(Y_1 \dots Y_m)$, comme l'a montré M. HETPER, satisfait aux conditions suivantes [15]):

1⁰) $\models \supset A(y_1 \dots y_m)\Phi(y_1 \dots y_m)$

2⁰) $\models \supset \wedge \Phi(x_1^1 \dots x_m^1) \wedge \dots$
$$\wedge \Phi(x_1^n \dots x_m^n) B(x_1^1 \dots x_m^1, \dots, x_1^n \dots x_m^n; y_1 \dots y_m)\Phi(y_1 \dots y_m)$$

3⁰) $\models \supset \Phi(y_1 \dots y_m) \vee A(y_1 \dots y_m) \exists \bar{x}_1^1 \dots \bar{x}_m^1 \dots \bar{x}_1^n \dots \bar{x}_m^n$
$$\wedge \Phi(\bar{x}_1^1 \dots \bar{x}_m^1) \wedge \dots \wedge \Phi(\bar{x}_1^n \dots \bar{x}_m^n) B(\bar{x}_1^1 \dots \bar{x}_m^1, \dots, \bar{x}_1^n \dots \bar{x}_m^n; y_1 \dots y_m).$$

4⁰) Si l'on suppose pour une certaine proposition $\Psi(Y_1 \dots Y_m)$ avoir lieu:

$$\models \supset A(y_1 \dots y_m)\Psi(y_1 \dots y_m),$$
$$\models \supset \wedge \Psi(x_1^1 \dots x_m^1) \wedge \dots$$
$$\wedge \Psi(x_1^n \dots x_m^n) B(x_1^1 \dots x_m^1, \dots, x_1^n \dots x_m^n; y_1 \dots y_m)\Psi(y_1 \dots y_m),$$

on aura en ce cas aussi:

$$\models \supset \Phi(y_1 \dots y_m)\Psi(y_1 \dots y_m).$$

La proposition Φ s'appelle alors une *fonction ancestrale relativement à A et B.*

Nous allons appliquer maintenant la méthode de fonctions ancestrales à la construction de la théorie des relations K-tuples entre nombres réels. Mais d'abord la même méthode nous servira pour définir quelques notions auxiliaires. Premièrement nous allons préciser la notion: *F est le K-ième terme de la suite* $a_{54}, a_{154}, a_{254}, \dots$ ad inf. (en symboles Var KF).

Posons: 2 pour m, 1 pour n, $\wedge = Y_1 0'[4] = Y_2 a_{54}[4]$ pour $A(Y_1 Y_2)$, $\wedge = Y_1 * X_1 X_1 [4] \exists [53] e_{53} \wedge = X_2 \Omega e_{53} 54 [4] = Y_2 \Omega \cdot 99(e_{53}) 54 [4]$ pour $B(X_1 X_2; Y_1 Y_2)$. La fonction ancestrale correspondante étant $\Phi(Y_1 Y_2)$, nous admettons:

Var KF *est une abréviation de* $\Phi(KF)$.

De manière tout à fait analogue nous pouvons introduire la notion Syst K(real) X, ce qu'on lit: *X est un groupe ordonné de K nombres réels.* Il faut prendre dans ce cas:

---

[15]) La théorie de M. Hetper est tout à fait indépendante de la théorie des types logiques. C'est pourquoi nous pouvons omettre les signes typicaux en l'exposant. Les grandes lettres X_j^i, Y_j représentent ici des expressions arbitraires, les petites lettres x_j^i, y_j ($\bar{x}_j^i$, $\bar{y}_j$) figurent pour des variables sémantiques réelles (apparentes) de type convenable; m, n sont des nombres naturels constants.

$\wedge = Y_1 0'[4] = Y_2 \cdot 0(5)[4]$ pour $A(Y_1 Y_2)$,

$\wedge = Y_1 {}^* X_1 X_1[4] \exists [53] u_{53} \wedge \mathrm{Real}\, u_{53} = Y_2 {}^* u_{53} X_2[4]$
pour $B(X_1 X_2; Y_1 Y_2)$.

Nous posons maintenant: 4 pour m, 1 pour n,

$\wedge = Y_1 0'[4] \wedge = Y_2 \cdot 0(5)[4] \wedge = Y_3 H[4] = Y_4 A[4]$
pour $A(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$

$\wedge = Y_1 {}^* X_1 X_1[4] \exists [53] u_{153} \exists [43] h_{143} s_{143} \wedge \mathrm{Real}\, u_{153}$
$\wedge = Y_2 {}^* u_{153} X_2[4] \wedge \mathrm{Var}\, X_1 s_{143}$

$\wedge = Y_3 {}^* s_{143} X_3[4] \wedge = Y_4 {}^* s_{143} h_{143}[4] \wedge \{h_{143} s_{143}\}[4](h_{143} s_{143} u_{153} X_4)[4]$
pour $B(X_1 X_2 X_3 X_4; Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$.

Soit $\Phi(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$ la fonction ancestrale relativement à $A(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$ et $B(X_1 X_2 X_3 X_4; Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$. Nous admettons alors:

$\mathrm{Rl}\, K(\mathrm{real}) XEHA$	est une abrév. de	$\Phi(KXEE)$
$\mathrm{Rel}\, K(\mathrm{real}) EH$	„	$//[53] x_{253} \supset \mathrm{Syst}\, K(\mathrm{real}) x_{253} \exists [43] a_{43}$ $\mathrm{Rl}\, K(\mathrm{real}) x_{253} EH a_{43}$
$\mathrm{Relat}\, K(\mathrm{real}) E$	„	$\exists [43] h_{243} \mathrm{Rel}\, K(\mathrm{real}) E h_{243}$
$\mathrm{rel}\, K(\mathrm{real}) XE$	„	$\exists [43] h_{243} a_{43} \wedge \mathrm{Rl}\, K(\mathrm{real}) XE h_{243} a_{43} a_{43}$.

Ces définitions, formellement analogues aux définitions fondamentales de la théorie des classes et des relations ordinaires, constituent la base de la théorie des relations à plusieurs membres. Les quatre théorèmes de M. HETPER, et surtout le dernier, y trouvent leur application plusieurs fois.

6. Suites infinies. La notion de suite infinie peut être définie immédiatement à l'aide de la notion de relation. Les suites infinies des types suivants nous seront nécessaires:

1°) Des suites du type 2 d'éléments du type 6, et particulièrement des suites de nombres naturels (Progr(nat)F) et de nombres rationnels (Progr(rat)F).

2°) Des suites du type 2 d'éléments du type 5, et particulièrement des suites de nombres réels (Progr(real)F). Ici se trouveront entre autres des collectifs.

3⁰) Des suites du type 3 d'éléments du type 4 (Progr[4]F). Ici prendront place entre autres des procédés de choix.

4⁰) Des suites du type 1 d'éléments du type 2 (Progr[2]F), qui serviront à définir des suites fondamentales de collectifs indépendants.

Les termes des suites 3⁰) auront par définition les nombres $0', 1', 2', \ldots$ *ad infinitum*, comme indexes, tandis que ceux de toutes les autres suites considérées n'auront que les indexes $1', 2', \ldots$ *ad infinitum*.

Nous appellerons *suite de choix* (Extr$F$) une suite infinie croissante quelconque F de nombres naturels. Soit donnée maintenant une classe E du type 2 de nombres naturels (Class (nat)E). Nous aurons besoin ensuite d'une méthode qui permette d'ordonner cet ensemble en suite croissante (infinie si l'ensemble est infini). Cette méthode sera donnée par les abréviations suivantes:

Ord EF	est une abrév. de	$\wedge \mathrm{Class(nat)}E \wedge \mathrm{Relat}[6621]F \,//\, [61] x_{61} y_{61}$
		$\equiv \mathrm{rel}[6621] x_{61} F y_{61} \wedge > x_{61} 0' \wedge \epsilon[621] y_{61} E$
		$\exists [21] f_{21} \wedge (1 \to 1)[6621] f_{21} \wedge // [61] z_{61}$
		$\equiv (\mathrm{D}\ni)[6621] z_{61} f_{21} \wedge > z_{61} 0' \leqslant z_{61} x_{61} // [61] z_{61}$
		$\equiv (\reflectbox{D}\ni)[6621] f_{21} z_{61} \wedge \epsilon[621] z_{61} E \leqslant z_{61} y_{61}$
Ordin EF	»	$\wedge \mathrm{Extr} F \, \mathrm{Ord} \, EF$.

Il nous faudra les notions de convergence et de limite, mais seulement pour des suites de fréquence, c.-à-d. pour des suites infinies à termes rationnels. Nous pouvons introduire de la manière ordinaire les notions de limite inférieure et de limite supérieure d'une suite quelconque F de nombres rationnels, ce qui nous permettra d'introduire ensuite la notion de convergence de F, ainsi que la notion limFE *(le nombre réel E est la limite de la suite F)*.

Nous introduisons enfin la notion du segment fini X à longueur K d'une suite quelconque F à termes réels (SegmKFX). Nous nous servirons encore une fois de la méthode des *fonctions ancestrales*. Prenons:

$\wedge = Y_1 0'[2] = Y_2 \cdot 0(5)[2]$ comme fonction initiale $A(Y_1 Y_2)$,
$\wedge = Y_1 * X_1 X_1 [2] \exists [51] u_{51} \wedge = Y_2 * u_{51} X_2 [2] \mathrm{rel}[6521] Y_1 F u_{51}$

comme fonction transitive $B(X_1 X_2; Y_1 Y_2) \cdot \Phi(Y_1 Y_2)$ étant la fonction ancestrale relativement à A et B, nous admettons:

$$\mathrm{Segm}\, KFX \quad \textit{est une abréviation de} \quad \wedge\, \mathrm{Progr(real)} F \Phi(KX).$$

On voit que nos segments de suites sont construits de la même manière que nos groupes ordonnés de nombres réels, et l'on pourrait démontrer qu'ils constituent de tels groupes.

Nous pouvons passer maintenant à la construction des notions fondamentales du calcul des probabilités.

II. Construction des notions fondamentales du calcul des probabilités

7. Procédés de choix et opérations de choix. La notion de *procédé de choix* est introduite par l'abréviation suivante:

$\mathrm{Elect}\, F$	est une abrév. de	$\wedge\, \mathrm{Progr}[4] F \,//\, [62] p_{62} \supset \mathrm{Nat}\, p_{62} \exists [42] e_{42}$ $\wedge\, \mathrm{rel}[6432] p_{62} F e_{42} \mathrm{Relat}\, p_{62} (\mathrm{real}) e_{42}$.

Nous allons définir maintenant deux opérations de choix agissant sur des suites quelconques de nombres réels. La première opération de choix, introduite par M. WALD[16]), que nous appellerons $\mathrm{Extract}\, C(F)K$, associe à toute suite C de nombres réels une de ses suites partielles K à l'aide d'un procédé de choix donné F. Nous la reconstruisons en admettant:

$\sigma(FC)G$	est une abrév. de	$\wedge\, \mathrm{Elect}\, F \wedge \mathrm{Progr(real)}\, C \wedge \mathrm{Class(nat)}\, G$ $//\, [61] q_{61} \equiv \epsilon [621] q_{61} G$ $\exists [61] p_{61} \exists [51] x_{51} \exists [41] e_{41}$ $\wedge = q_{61} * p_{61} p_{61} [2] \wedge \mathrm{rel}[6432] p_{61} F e_{41}$ $\wedge\, \mathrm{Segm}\, p_{61} C x_{51}\, \mathrm{rel}\, p_{61} (\mathrm{real}) x_{51} e_{41}$
$S(FC)H$	„	$\exists [21] g_{21} \wedge \sigma(FC) g_{21} \mathrm{Ordin}\, g_{21} H$
$\mathrm{Extract}\, C(F)K$	„	$\exists [21] h_{21} \wedge S(FC) h_{21} \uparrow [(665)21] h_{21} CK$.

La seconde opération de choix, précisée par M. DÖRGE[17]), chez nous $\mathrm{Excub}\, C(DL)K$, fait correspondre à toute suite C

[16]) l. c.

[17]) K. Dörge, *Zu der von R. v. Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung I*, Math. Zeitschr., 32 (1930).

de nombres réels une de ses suites partielles K à l'aide d'une autre suite de nombres réels D et d'un ensemble mesurable donné L. Nous définissons cette opération par les abréviations suivantes:

$\tau(ECKL)G$	est une abrév. de	$\wedge \mathrm{Extr}\, E \wedge \mathrm{Progr(real)}C \wedge \uparrow [(665)21] ECK \wedge \mathrm{mens}\, L \wedge \mathrm{Class(nat)}\, G$
		$/\!/[61]p_{61} \equiv \epsilon[621]p_{61} G \,\exists[51] q_{61} \wedge \mathrm{rel}[6521] p_{61} K q_{51} \,\epsilon[543] q_{51} L$
$T(ECL)H$	„	$\exists[21] g_{121} k_{121} \wedge \tau(ECk_{121}L) g_{121}\, \mathrm{Ordin}\, g_{121} H$
idem	„	$* a_{162} * a_{62} = a_{162} a_{62} [6]$
$T(DL)H$	„	$T(\mathrm{idem}\, DL)H$
$\mathrm{Excub}\, C(DL)K$	„	$\wedge \mathrm{Progr(real)}C \,\exists[21] h_{121} \wedge T(DL) h_{121} \uparrow [(665)21] h_{121} CK$

8. Un exemple. Nous allons construire le *procédé de choix identique*. Nous appliquerons deux fois la méthode des fonctions ancestrales en nous basant sur la notion $\mathrm{Var}\, KF$, déjà obtenue par la même méthode.

Prenons: $\wedge = Y_1 0'[4] = Y_2 \cdot 0(5)[4]$ comme fonction initiale, $\wedge = Y_1 * X_1 X_1 [4] \,\exists [43] u_{143} \wedge \mathrm{Var}\, X_1 u_{143} = Y_2 * u_{143} X_2 [4]$ comme fonction transitive. $\Phi(Y_1 Y_2)$ étant la fonction ancestrale correspondante, nous admettons:

$\mathrm{Comb}\, KF$ *est une abréviation de* $\Phi(KF)$.

Prenons ensuite: $\wedge = Y_1 0'[4] = Y_2 \mathrm{Expr}[5] \cdot 0(5)[4]$ pour fonction initiale $A(Y_1 Y_2)$,

$$\wedge = Y_1 * X_1 X_1 [4] \,\exists [43] h_{243} s_{243} x_{243} y_{243} \wedge = Y_2 * s_{243} h_{243} [4] \wedge \mathrm{Var}\, X_1 s_{243} \wedge \mathrm{Comb}\, X_1 x_{243}$$

$\wedge \mathrm{Comb}\, Y_1 y_{243} \wedge \{h_{243} y_{243}\}[4](h_{243} y_{243} x_{243} X_2)[4]$ pour fonction transitive $B(X_1 X_2; Y_1 Y_2)$.

Soit maintenant $\Phi(Y_1 Y_2)$ la fonction ancestrale relativement à A et B. Nous admettons alors:

$\mathrm{Id}\, KF$ *est une abréviation de* $\Phi(KF)$,
Idem „ „ „ „ $* a_{143} * a_{63}\, \mathrm{Id}\, a_{63} a_{143}$.

Cette dernière abréviation nous donne le procédé de choix identique.

9. La notion de collectif. Nous définissons successivement la notion de *fréquence finie* (Fr), de *fréquence-limite* (Pr), de *fréquence-limite indépendante des procédés de choix* (Prob), et enfin la notion de *collectif*. Nous admettons notamment:

$\mathrm{Fr}(FCL)H$	est une abrév. de	$\wedge\,\mathrm{Elect}\,F \wedge \mathrm{Relat}[6621]H\,//\,[61]p_{161}y_{161}$ $= \mathrm{rel}[6621]p_{161}Hy_{161}$ $\exists[61]q_{161}\,\exists[21]h_{21}h_{121} \wedge S(FC)h_{21}$ $\wedge\, T(h_{21}CL)h_{121}$ $\wedge\,\mathrm{rel}[6621]p_{161}h_{121}q_{161} = y_{161}\dfrac{p_{161}}{q_{161}}[2]$
$\mathrm{Pr}(FCL)X$	„	$\exists[21]r_{21} \wedge \mathrm{Fr}(FCL)r_{21} \vee \lim r_{21}X \wedge \underset{q}{=}$ $X(0'/1') \sim \mathrm{Progr}(\mathrm{rat})r_{21}$
$\mathrm{Prob}(CL)X$	„	$//[31]f_{31} \supset \wedge\,\mathrm{Elect}\,f_{31}\,\exists[21]h_{21}S(f_{31}C)h_{21}$ $\mathrm{Pr}(f_{31}CL)X$
$\mathrm{Collect}\,C$	„	$\wedge\,\mathrm{Progr}(\mathrm{real})C\,//\,[41]l_{41} \supset \mathrm{mens}\,l_{41}\mathrm{E}[51]x_{51}$ $\mathrm{Prob}(Cl_{41})x_{51}$

Nous introduisons encore la notion d'équivalence des collectifs:

$\sim(\mathrm{coll})CD$	est une abrév. de	$\wedge\,\mathrm{Progr}(\mathrm{real})C \wedge \mathrm{Progr}(\mathrm{real})D\,//\,[41]l_{41}$ $\supset \mathrm{mens}\,l_{41}\,\exists[51]x_{51}$ $\wedge\,\mathrm{Prob}(Cl_{41})x_{51}\,\mathrm{Prob}(Dl_{41})x_{51}.$

Et si l'on veut: $\mathrm{Probab}(CL)X$ *est une abréviation de* $\wedge\,\mathrm{Collect}\,C\,\mathrm{Prob}(CL)X$. Ce qu'on lit: *$X$ est la probabilité de l'ensemble L dans le collectif C.*

10. Suites fondamentales. C'est M. Dörge [18]) qui a considéré le premier une *suite fondamentale de collectifs indépendants* introduite par une voie axiomatique. M. Wald [19]) a défini directement la notion de suite fondamentale et formulé un théorème concernant l'existence de telles suites. Nous pouvons reconstruire la définition de M. Wald en employant la méthode des fonctions ancestrales dans le cas $m=2$, $n=2$. Il faut prendre cette fois:

$\mathrm{rel}[6210]Y_1GY_2$ comme fonction initiale $A(Y_1Y_2)$,

---

[18]) l. c.

[19]) l. c. [2]), pp. 53 et 54, théorème VII.

$\wedge = X^1_1 Y_1[1] \vee \exists [30] f_{30}$ Extract $X^1_2(f_{30}) Y_2 \wedge \sim = X^1_1 X^2_1[1]$ $\exists [40] l_{40}$ Excub $X^1_2(X^2_2 l_{40}) Y_2$ comme fonction transitive $B(X^1_1 X^1_2, X^2_1 X^2_2; Y_1 Y_2)$.

Soit $\Phi(Y_1 Y_2)$ la fonction ancestrale relativement à A et B. Nous admettons alors:

Collex $P(G)K$	est une abrév. de	$\Phi(PK)$
Fund G	„	$\wedge$ Progr$[2]G // [60]p_{160} // [20]c_{120}k_{120} \supset \wedge$ rel$[6210]p_{160}Gc_{120}$ Collex $p_{160}(G)k_{120} \sim$ (coll) $c_{120}k_{120}$.

Cette dernière abréviation nous donne justement la notion de suite fondamentale. Nous admettons enfin:

Coll fund $P(G)K$	est une abrév. de	$\wedge$ Fund G rel$[6210]PGK$
Collect $P(G)K$	„	$\wedge$ Fund G Collex $P(G)K$
Indep $(G)HK$	„	$\wedge$ Fund $G \, \exists [60]p_{160}q_{160}$ $\wedge \sim = p_{160}q_{160}[1] \wedge$ Collex $p_{160}(G)H$ Collex $q_{160}(G)K$.

11. Remarques finales. Nous avons reconstruit les notions fondamentales de la théorie des collectifs dans le système élémentaire $\models[60]c$ de *New foundation*. Dans ce système on peut démontrer d'une manière intuitive les théorèmes de M. Wald. Si l'on voulait donner des démonstrations rigoureuses, il faudrait alors effectuer une construction tout à fait analogue dans le système métamathématique $\vdash_0(82)0$ [20]). Il est intéressant de remarquer que dans notre interprétation les théorèmes V et VI de M. Wald seront vrais évidemment à cause de la fausseté de leurs prémisses. En effet, tous les procédés de choix ne peuvent être à la fois *constructivement définis* (cela veut dire *décidables*), en vue des résultats fameux de M. Gödel [21]).

---

[20]) cf. *New foundation*, chapitre VI, paragraphe 3, p. 35. Il serait aussi nécessaire d'introduire une règle supplémentaire de démonstration, dite de l'induction transfinie, précisée par M. Hetper dans un travail, qui va paraître bientôt.

[21]) K. Gödel, *Über formal unentscheibare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVIII (1931), Heft 1.

Plus généralement encore, comme M. Chwistek l'a remarqué, sous l'hypothèse unique que notre système $\vdash_0(82)0$ soit libre de contradiction, on peut démontrer que nos collectifs constituent des suites au moins partiellement *indécidables* [22]).

Les collectifs du monde réel devraient être, selon notre conception, des suites complètement indécidables. De telle manière on pourrait comprendre l'impossibilité de prévoir le résultat d'un événement individuel, quoiqu'il soit objectivement déterminé. Il semble que la même conception puisse jeter une certaine lumière sur les difficultés surgies dans les fondements de la mécanique nouvelle de quanta en connexion avec le problème du déterminisme. L'*indeterminisme apparent* des événements atomiques s'expliquerait notamment par l'activité des *lois indécidables*.

---

[22]) Exactement: la proposition rel$[8743]n_{81}CX$ (C étant un collectif, X un nombre réel quelconque) est indécidable dans notre système $\vdash_0(82)0$, pour une infinité de substitutions possibles des nombres naturels pour n_{81}.

COMPTES-RENDUS
DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE
1938
JUILLET — DÉCEMBRE

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ *)

La Société déplore la mort de son éminent Membre depuis le 10.III.1926, le Prof. Dr Wacław Dziewulski de l'Université de Wilno, décédé le 10.VIII.1938 à l'âge de 55 ans.

Prof. Dr Zdzisław Krygowski de l'Université de Poznań a passé en retraite depuis le 1.IX.1938.

Doc. Dr Karol Borsuk a été nommé Professeur extraordinaire de mathématique à l'Université de Varsovie depuis le 1.IX.1938.

Dr Władysław Hetper s'est retiré comme Sécrétaire de la Section de Lwów.

Mgr Andrzej Turowicz est devenu Sécrétaire de la Section de Lwów.

Dr Ada Halpern, *Lwów*, ul. Kościuszki 7, est depuis le 18.VI.1938 Membre de la Section de Lwów.

Mgr Leon Jeśmanowicz, *Wilno*, ul. Zamkowa 11, Seminarium Matematyczne, est depuis le 28.XI.1938 Membre de la Section de Wilno.

Mgr Mikołaj Taranowski, *Wilno*, ul. Zakretowa 23A, est depuis le 1.VII.1938 Membre de la Section de Wilno.

SÉANCES DES SECTIONS

SECTION DE CRACOVIE

26.X.1938. Leja F. *Remarques sur la dérivée dans le domaine complexe.*

On sait que, si $f(z)$ est une fonction holomorphe non constante dans le voisinage d'un point $z=z_0$, alors:

*) voir le fascicule I de ce volume, p. 97—107.

1° dans chaque voisinage de z_0 il existe un point z_1 tel que $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ *(principe de maximum)*,

2° l'équation $w = f(z)$ fait correspondre au voisinage de z_0 un voisinage du point $w_0 = f(z_0)$ *(principe de voisinage)*.

Admettons que la fonction $f(z)$ est définie dans le voisinage de z_0 et qu'elle possède la dérivée au point z_0, sans en posséder nécessairement ailleurs. L'auteur montre que le principe de maximum est une conséquence immédiate de l'existence de la seule dérivée $f'(z_0) \neq 0$. D'autre part, le principe de voisinage résulte immédiatement de l'hypothèse $f'(z_0) \neq 0$ et de la continuité de $f(z)$ dans le voisinage de z_0.

L'existence de la seule dérivée $f'(z_0) = 0$ n'entraîne ni le principe de voisinage ni même le principe de maximum. D'autre part, l'existence de la seule dérivée $f'(z_0) \neq 0$ n'entraîne non plus le principe de voisinage comme le prouve l'exemple suivant:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z = 0, \\ ze^{i\Phi} & \text{pour } z \neq 0, \end{cases}$$

où $\Phi = (1 - \varphi/\pi)\alpha$, φ étant l'argument de z assujetti à la condition $0 \leq \varphi < 2\pi$ et α étant le nombre défini par les conditions:

$$0 < \alpha < \pi/2, \qquad \sin\alpha = |z|^{-1}\left(-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + |z|^2}\right).$$

26.X.1938. Leja F. *Un problème concernant la généralisation des polynômes de Tchebycheff.*

Soit R un espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions, E un ensemble fermé et borné de points de R, p un point variable dans R et $q_1, q_1, \ldots, q_n$ un système de n point fixes. Nous dirons que l'équation

$$|pq_1| \cdot |pq_2| \cdot \ldots \cdot |pq_n| = r^n, \tag{1}$$

où $|pq|$ désigne la distance entre les points p et q, définit dans l'espace R une *lemniscate* d'ordre n, de rayon r et de foyers $q_1, q_1, \ldots, q_n$; l'ensemble E est contenu dans l'intérieur de cette lemniscate si chaque point p de E remplit la condition $|pq_1| \cdot |pq_2| \cdot \ldots \cdot |pq_n| \leq r^n$.

Considérons toutes les lemniscates d'ordre n contenant E et soit ϱ la borne inférieure de leurs rayons. Il est facile de prouver qu'*il existe au moins une lemniscate d'ordre n et de rayon ϱ contenant E*; l'auteur pose la question: *Existe-t-il une seule lemniscate d'ordre n jouissant de cette propriété extrémale?*

Dans le cas du plan la réponse est affirmative, comme le prouve la théorie des polynômes de Tchebycheff.

9.XI.1938. Gołąb S. *Sur la notion de pseudogroupe des transformations.*

L'auteur soumet à une critique la notion de pseudogroupe des transformations et en donne de sa part une définition rigoureuse qui, en outre, permet de passer par un procédé d'abstraction à la notion de groupe abstrait au sens classique.

19.XI.1938. **Gołąb S.** *Sur la notion de comitant* [ces Annales **17** (1938), p. 177].

30.XI.1938. **Wileński H.** *Sur l'approximation de la loi de probabilité dont tous les moments sont connus.*

Envisageons le type de convergence de la série $w(x)\sum_{i=0}^{n} A_i P_i(x)$ vers une fonction $p(x)$ qui est de la forme

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{\beta}\frac{[p(x)-w(x)\sum_{i=0}^{n}A_i P_i(x)]^2}{w(x)}dx=0,$$

où $w(x)$ est une fonction positive définie dans l'intervalle $\langle a,\beta\rangle$ et $\{P_i(x)\}$ est le système donné de polynômes orthogonaux relativement à $w(x)$. Un tel système de polynômes existe toujours lorsque l'intégrale $I=\int_{a}^{\beta}\frac{|p(x)|^2}{w(x)}dx$ existe.

Désignons par μ_i les moments de la fonction $p(x)$, par ν_i ceux de la fonction $w(x)$, par $\|a_{ij}\|_n$ la matrice inverse à la matrice $\|\nu_{i+j}-\nu_i\nu_j\|_n$, par λ_n la plus petite valeur propre de cette dernière et par Δ_n son déterminant $(i, j, n=1,2,\ldots)$.

Théorème. *Pour qu'il existe une fonction $p(x)$ ayant des moments égaux à la suite donnée de nombres $\{\mu_i\}$ et admettant l'intégrale I, il faut et il suffit que la forme quadratique $S_n(\mu)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mu_i-\nu_i)(\mu_j-\nu_j)$ soit bornée pour tout n naturel.*

Corollaire. *Pour qu'une telle fonction $p(x)$ existe, il suffit que deux conditions suivantes soient remplies à la fois: 1° $\lim\inf\lambda_n>0$; 2° $\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\nu_i)^2$ converge. La condition 1° peut être remplacée par la condition (plus faible) suivante:* $\lim\inf\Delta_n>0$.

14.XII.1938. **Leja F.** *Sur les points zéros des fonctions analytiques de plusieurs variables* [ces Annales **17**, p. 227].

Appelons *suite de Carathéodory* une suite de points $\{P_n\}$ de l'espace R_m de m variables complexes tendant vers l'origine des coordonnées, si chaque fonction analytique de m variables complexes, régulière dans le voisinage de l'origine des coordonnées, s'annule identiquement quand elle s'annule en presque tous les points P_n.

L'auteur démontre que chaque suite de points $\{x_n,y_n\}$ de l'espace R_2, où $|x_n|+|y_n|>0$ et $|x_n|+|y_n|\to 0$, pour laquelle la suite $\{y_n/x_n\}$ a une infinité de points d'accumulation est une suite de Carathéodory de R_2.

SECTION DE LWÓW

2.VII.1938. **Leray J.** (Nancy). *Sur le problème de Dirichlet.*

7.VII.1938. **Ulam S.** *Sur les corps d'ensembles.*

29.X.1938. **Mazur S.** *Sur les espaces des fonctions continues.*

Soit X un espace métrique séparable et Φ l'ensemble de toutes les fonctions réelles, continues dans X. L'auteur démontre qu'il existe dans Φ une métrique (f,g) telle que

1° $(f_n,g)\rightarrow 0$ entraîne la convergence uniforme de la suite $\{f_n(x)\}$ vers $g(x)$ en chaque point;

2° Φ avec la métrique (f,g) est un espace séparable.

Il en résulte en particulier que si $\Psi\subset\Phi$, $\Psi_0=\Psi$ et si Ψ^ξ désigne, pour chaque nombre ordinal ξ, soit l'ensemble $\sum\limits_{\eta<\xi}\Psi^\eta$, soit l'ensemble de toutes les $f\epsilon\Phi$ pour lesquelles il existe une suite de fonctions de Ψ^η, où $\eta<\xi$, convergente partout vers $f(x)$, suivant que ξ est un nombre limite ou non, alors il existe un $\vartheta<\Omega$ tel que $\Psi^{\vartheta+1}=\Psi^\vartheta$.

29.X.1938. **Kac M.** *Sur l'allure asymptotique de certaines fonctions.*

SECTION DE POZNAŃ

11.X.1938. **Marcinkiewicz J.** (Wilno). *Sur le développement de la théorie de la probabilité au cours de 25 ans derniers.*

La théorie des probabilités a fait à notre époque des progrès remarquables. Les notions fondamentales de cette théorie ont été axiomatisées et liées avec celle de la logique et de la théorie de la mesure. Nouvelles méthodes ont été créées et appliquées avec succès à la solution des problèmes classiques et nouveaux. Toutes les branches des mathématiques sont utilisées dans la théorie des probabilités. Il suffit d'en indiquer celles dont l'importance est la plus grande.

En appliquant la *théorie des fonctions de variables réelles*, on a résolu d'une manière complète les problèmes de la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, des lois des grands nombres et du logarithme itéré.

La *théorie des transformations de Fourier*, a apporté la solution complète du problème de la convergence de la loi des sommes de variables aléatoires indépendantes vers la loi de Gauss, permis de pénétrer profondément dans la structure des lois de probabilité et donné naissance à la théorie moderne des procédés stochastiques discontinus.

La méthode de la *théorie des équations différentielles aux dérivées partielles* a donné la solution des nombreux problèmes de la théorie des procédés stochastiques continus.

C'est grâce à la *théorie des fonctions analytiques* qu'on est parvenu à saisir les nuances de divers modes de la convergence stochastique et éclaircir les problèmes modernes de la théorie de la composition des lois de probabilité.

La grande importance des méthodes algébriques, surtout celle de la *théorie des groupes* s'accentue surtout dans la théorie de variables aléatoires en chaînées.

Sans multiplier les exemples, on peut dire que la théorie des probabilités, qui, il y a un quart de siècle, n'a pas été considérée comme une discipline mathématique autonome, est devenue aujourd'hui la branche centrale de la mathématique contemporaine.

25.X.1938. Zaremba S. K. (Kraków). *Les mathématiques et la façon de concevoir le monde.*

Sans s'attarder sur la phase magique des mathématiques, le conférencier fait ressortir la liaison intime entre les conceptions philosophiques des Eléates et les caractères dominants de la géométrie de la Grèce classique et discute l'influence néoplatonicienne qui, a peu près vingt siècles plus tard, ne fut pas etrangère à l'invention du calcul infinitésimal. Après avoir rappelé les répercussions philosophiques de la découverte des géométries non-euclidiennes, le conférencier insiste en terminant sur la part des mathématiques dans le processus de la relativisation des notions, qui domine le progrès philosophique.

25.X.1938. Zaremba S. K. (Kraków). *Apperçu sur les nouvelles recherches relatives aux points singuliers des équations différentielles.*

Après avoir passé en revue les travaux relatifs aux points singuliers de l'équation $Y(x,y)dx-X(x,y)dy=0$ depuis Briot et Bouquet, et rappelé, en particulier, ses propres résultats relatifs à la discrimination des points singuliers, l'auteur montre la véritable signification topologique des critères basée sur ses recherches précédentes relatives aux réseaux qu'il avait appelés *réseaux quasi-réguliers* [ces Annales **15**, 1936, p. 1—73]. La nouvelle notion introduite dans la conférence est celle de *point de tangence* de deux familles quasi-régulières de courbes; ce sont les points tels que dans aucun de leurs voisinages les deux familles ne sont transversales. On trouve facilement les deux propositions suivantes:

I. *Si une famille quasi-régulière, ayant un point singulier isolé O, admet dans un voisinage de celui-ci une famille transversale pour laquelle O est un col au sens strict, alors, pour la première famille, O est un col, peut-être généralisé.*

II. *Une famille quasi-régulière* ($\mathcal{A}$) *admettant un point singulier isolé O d'indice —1, s'il existe une autre famille quasi-régulière pour laquelle O est un centre et telle que chaque courbe (fermée) de cette seconde famille située dans un certain voisinage de O comporte exactement quatre points de tangence des deux familles, le point O est pour* ($\mathcal{A}$) *un col, peut-être généralisé.*

On en déduit les deux critères trouvés par l'auteur pour les cols généralisés des équations différentielles[1]).

[1]) Voir: *Sur l'allure des caractéristiques de l'équation différentielle* $Y(x,y)dx-X(x,y)dy=0$ *au voisinage d'un point singulier isolé*, Bull. Acad. Pol. des Sciences, Série A, 1934, p. 197—207 et *Contribution à la discrimination des points singuliers des équations différentielles ordinaires*, ibid. 1936, p. 439—445.

La même méthode topologique permet de trouver d'autres critères de même genre. Pour ce qui est des foyers, l'auteur ne sait indiquer qu'un critère pratique, mais qui est à peu près évident: Un point singulier isolé d'une famille quasi-régulière est un foyer ou un noeud (ce qui est indifférent au point de vue purement topologique) s'il existe une famille transversale pour laquelle le même point est un centre.

8.XI.1938. Mazur S. (Lwów). *Méthodes et problèmes de la théorie des opérations.*

— *Nombres à plusieurs unités.*

6.XII.1938. Gołąb S. (Kraków). *Ein Satz über Regelflächen und seine Verallgemeinerung auf Riemannsche Räume* [à paraître dans les Opuscula Mathematica].

Kürzehalber soll der Satz für euklidischen Raum formuliert werden. Es sei eine ebene Kurve C gegeben, die als Leitkurve einer Regelfläche S angesehen werden soll.

Mit W_1, W_2, W_3 bezeichnen wir die folgenden drei Eigenschaften der Fläche S: 1) die Erzeugenden schliessen mit der Ebene der Leitkurve einen Konstanten Winkel, 2) die Erzeugenden liegen in den Normalebenen der Leitkurve, 3) die Fläche S ist abwickelbar.

Es wird bewiesen, daß jedes Paar von Eigenschaften W_1, W_2, W_3 die dritte nach sich zieht.

SECTION DE VARSOVIE

30.IX.1938. Szpilrajn E. *Ensembles indépendants et mesures non séparables* [Comptes Rendus (Paris) **207** (1938), p. 768-770].

7.X.1938. Waraszkiewicz Z. *La presque-périodicité de H. Bohr et la transitivité de G. D. Birkhoff.*

L'auteur établit une équivalence entre les systèmes compacts de trajectoires presque-périodiques au sens de H. Bohr et ceux de lignes d'un mouvement défini dans un espace topologiquement homogène et qui y est transitif au sens de G. D. Birkhoff. (Le mouvement défini dans un espace où l'on suppose avoir défini une mesure est dit transitif dans cet espace lorsqu'il conserve la mesure et que chaque ligne de mouvement y est dense). La première partie de cette équivalence repose sur la notion d'image de Bochner Y_f d'une fonction presque-périodique $f(x)$ de variable réelle. Voici la définition de cette notion. Y_f est le sous-ensemble de l'espace de fonctions continues dont les points sont les fonctions $f(x+t)$ où $-\infty < t < +\infty$. La fermeture $\overline{Y}_f$ de Y_f peut être décomposée en lignes disjointes, de la forme Y_{f^*}, où f^* est une fonction presque-périodique. Ces lignes peuvent être considérées comme des trajectoires d'un mouvement et on montre que $\overline{Y}_f$ est un système transitif au sens de G. D. Birkhoff. D'ailleurs, on peut montrer sans peine que $\overline{Y}_f$ est métriquement transitif, donc ergodique.

14. X. 1938. **Waraszkiewicz Z.** *La presque-périodicité de H. Bohr et la transitivité de G. D. Birkhoff* (suite).

Etant donnés un espace M topologiquement homogène et un mouvement transitif dans M, il existe une fonction presque périodique $f(x)$ telle que $\overline{Y}_f$ est homéomorphe à M, les images de Bochner qui font partie de $\overline{Y}_f$ correspondant aux lignes de mouvement de M. En particulier, le système des trajectoires en question est métriquement homogène.

21. X. 1938. **Sierpiński W.** *Sur l'existence d'une base dénombrable d'ensembles linéaires dénombrables* [Fund. Math. **31** (1938), p. 259–261].

28. X. 1938. **Georgieff G.** (Sofia). *Sur une généralisation du théorème de Rolle.*

28. X. 1938. **Georgieff G.** (Sofia). *Remarque sur l'espace de Linfield.*

28. X. 1938. **Eilenberg S.** *On φ-measures.*

Let $\mathfrak{X}$ be a metric space. $\delta(\mathcal{E})$ will denote the diameter of $\mathcal{E}\subset\mathfrak{X}$. Given a function $\varphi(\mathcal{E})\geqslant 0$ defined for all $\mathcal{E}\subset\mathfrak{X}$ and such that: 1° $\varphi(0)=0$, 2° $\varphi(\mathcal{E}_1)\leqslant\varphi(\mathcal{E}_2)$ if $\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_2$, we define for each $X\subset\mathfrak{X}$

$$L_n^{\varphi}(X)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\mathcal{E}_i)$$

where $X=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\dots$ is an arbitrary decomposition such that $\delta(\mathcal{E}_i)<1/n$. The *$\varphi$-measure*[1]) of X is the limit (which may be infinite)

$$L^{\varphi}(X)=\lim_{n\to\infty}L_n^{\varphi}(X).$$

Let: X_0 be a fixed subset of $\mathfrak{X}$; $\varrho(x)=\inf\limits_{x_0\in X_0}|x-x_0|$; $S(r)=\varrho^{-1}(r)$. Given $\mathcal{E}\subset\mathfrak{X}$ we define $r_1=\inf\limits_{x\in\mathcal{E}}\varrho(x)$ and $r_2=\sup\limits_{x\in\mathcal{E}}\varrho(x)$. Obviously $r_2-r_1\leqslant\delta(\mathcal{E})$ and $\int\limits_0^{\infty}\varphi[S(r)\cdot\mathcal{E}]\,dr=\int\limits_{r_1}^{r_2}\varphi[S(r)\cdot\mathcal{E}]\,dr\leqslant\varphi(\mathcal{E})\int\limits_{r_1}^{r_2}dr\leqslant\varphi(\mathcal{E})\,\delta(\mathcal{E})$. Therefore putting $\psi(\mathcal{E})=\varphi(\mathcal{E})\,\delta(\mathcal{E})$ we have

$$\int_0^{\infty}\varphi[S(r)\cdot\mathcal{E}]\,dr\leqslant\psi(\mathcal{E}). \tag{1}$$

Theorem:

$$\int_0^{\infty}L^{\varphi}[S(r)]\,dr\leqslant L^{\psi}(\mathfrak{X}). \tag{2}$$

Proof. Let $\mathfrak{X}=\mathcal{E}_1^n+\mathcal{E}_2^n+\dots$ be a sequence of decompositions such that

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\psi(\mathcal{E}_i^n)=L^{\psi}(\mathfrak{X}),\qquad\delta(\mathcal{E}_i^n)<1/n. \tag{3}$$

[1]) Cf. F. Hausdorff, Math. Ann. **79** (1919), p. 157–179.

Then, according to the definition of L^φ, we have $L^\varphi[S(r)] \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi[S(r)\cdot \mathcal{E}_i^n]$, and by Fatou's lemma

$$\int_0^\infty L^\varphi[S(r)]\,dr \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty \varphi[S(r)\cdot \mathcal{E}_i^n]\,dr$$

Using (1) and (3) we obtain (2).

Remark. The functions $\varphi[S(r)\cdot\mathcal{E}]$ and $L^\varphi[S(r)]$ need not to be measurable. Nevertheless the integrals keep their meaning as upper integrals and the inequalities (1) and (3) hold. In fact putting

$$d_{\mathcal{E}}(r) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < r_1 \quad \text{and} \quad r > r_2 \\ \varphi(\mathcal{E}) & \text{for} \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \end{cases}$$

we have $\varphi[S(r)\cdot\mathcal{E}] \leqslant d_{\mathcal{E}}(r)$ and $\int_0^\infty d_{\mathcal{E}}(r)\,dr \leqslant \psi(\mathcal{E})$. The function $d(r) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{\mathcal{E}_i^n}(r)$ can be attached with the same effect to $L^\varphi[S(r)]$.

Let us define

$$\varphi_0(0) = 0, \qquad \varphi_0(\mathcal{E}) = 1 \quad \text{if} \quad \mathcal{E} \neq 0, \qquad \varphi_{n+1}(\mathcal{E}) = \varphi_n(\mathcal{E})\,\delta(\mathcal{E}).$$

Clearly $\varphi_n(\mathcal{E}) = [\delta(\mathcal{E})]^n$ for $n = 1, 2, \ldots$ The φ_n-measure $L^{(n)}(X) = L^{\varphi_n}(X)$ is the *n-dimensional measure* [1]) of $X \subset \mathcal{X}$. We verify easily that $L^{(0)}(X)$ is the number of points of X when X is finite and ∞ if X is infinite. It follows from (3) that

(i) $$\int_0^\infty L^{(n)}[S(r)]\,dr \leqslant L^{(n+1)}(\mathcal{X}),$$

(ii) $L^{(n+1)}(\mathcal{X}) = 0$ $(L^{(n+1)}(\mathcal{X}) < \infty)$ *implies* $L^{(n)}[S(r)] = 0$ [2]) $(L^{(n)}[S(r)] < \infty)$ *for almost all* $r \geqslant 0$.

18. XI. 1938. Eilenberg S. *On continua of finite length.*

Let $\mathcal{X}$ be a metric separable space. Szpilrajn [3]) has proved that: $\dim \mathcal{X} \leqslant n$ *if and only if there is a space* $\mathcal{X}'$ *homeomorphic to* $\mathcal{X}$ *such that* $L^{(n+1)}(\mathcal{X}') = 0$. The question arises which topological property of $\mathcal{X}$ is obtained replacing the condition $L^{(n+1)}(\mathcal{X}') = 0$ by the stronger condition $L^{(n)}(\mathcal{X}') < \infty$. We will discuss here the case $n = 1$, assuming further that $\mathcal{X}$ is a continuum.

Given a function $f(\mathcal{X})$ and a point $y \in f(\mathcal{X})$, let $k(f:y) = n$ if $f^{-1}(y)$ is finite and contains exactly n points, $k(f;y) = \infty$ if $f^{-1}(y)$ is infinite. Let $\Phi(f)$ be the subset of $f(\mathcal{X})$ defined by the condition $k(f;y) < \infty$.

[1]) S. Saks, *Theory of the Integral*, Monogr. Matem. **7** (1937), p. 53.

[2]) See E. Szpilrajn, Fund. Math. **28** (1936), p. 84, th. 1.

[3]) Fund. Math. **28** (1936), p. 81-89.

Theorem. For each continuum $\mathfrak{X}$ the following properties are equivalent:

(A) *there is a homeomorphic image $\mathfrak{X}'$ of $\mathfrak{X}$ such that $L^{(1)}(\mathfrak{X}')<\infty$,*

(B) *for each two closed sets $X_0, X_1 \subset \mathfrak{X}$, $X_0 \cdot X_1 = 0$ there is a continuous function f defined on $\mathfrak{X}$ such that*

(b$_1$) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $f(x)=0$ *for* $x \in X_0$, $f(x)=1$ *for* $x \in X_1$,

(b$_2$) *the set $\Phi(f)$ is non-enumerable.*

Proof. (A)$\rightarrow$(B). We may admit that $L^{(1)}(\mathfrak{X})<\infty$. Let us put $\varrho(x) = \inf_{x_0 \in X_0} |x-x_0|$. It follows from the paper above [p. 252, (ii)] that $\varrho^{-1}(y)$ is finite for almost all $y>0$. Choose $t>0$ such that $\varrho(x)>t$ if $x \in X_1$. Putting $f(x)=\min[1, \varrho(x)/t]$, we obtain a function satisfying (b$_1$) and such that $\Phi(f)$ has the Lebesgue measure 1.

(B)$\rightarrow$(A). We admit that (B) is satisfied. A decomposition

$$\mathfrak{X} = F_1 + F_2 + \ldots + F_r \tag{1}$$

will be called *regular* if each F_i is a continuum and $F_i \cdot F_j$ is finite for $i \neq j$.

(C) For each $\varepsilon>0$ there is a regular decomposition (1) such that $\delta(F_i)<\varepsilon$ $(i=1, 2, \ldots, r)$.

It follows from (B) that $\mathfrak{X}$ is regular in the sense of Menger[1]). This implies (C) almost immediately.

(D) The condition (b$_2$) of (B) may be replaced by the following:

(b$_2'$) *the Lebesgue measure $|\Phi(f)|$ of $\Phi(f)$ is >0.*

In fact $\Phi(f)$ being a non-enumerable Borel set there is a perfect set $P \subset \Phi(f)$. Let h be a homeomorphism transforming the interval $I=[0,1]$ into itself and such that: $h(0)=0$, $h(1)=1$ and $|h(P)|>0$. Putting $f'=hf$ we see that $|\Phi(f')|>0$.

(E) for each pair of closed sets $X_0, X_1 \subset \mathfrak{X}$, $X_0 \cdot X_1 = 0$ there is a continuous function g defined on $\mathfrak{X}$ such that:

(e$_1$) $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, $g(x)=0$ for $x \in X_0$, $g(x)>0$ for $x \in X_1$,

(e$_2$) $\sum_{i=1}^{r} \delta[g(F_i)] \leqslant 1$ for each regular decomposition (1).

Let f be the function given by (D), and let $g(x) = \int_0^{f(x)} [k(f; y)]^{-1} dy$.

For $x \in X_0$ we have $f(x)=0$ and therefore $g(x)=0$. For $x \in X_1$ we have $f(x)=1$ and since $\int_0^1 [k(f; y)]^{-1} dy > 0$ we obtain $g(x)>0$. For each regular decomposition (1) each of the sets $f(F_i)$ is a continuum. Let $f(F_i)=[a_i, b_i]$, where $a_i \leqslant b_i$. It follows that $\delta[g(F_i)] = \int_{a_i}^{b_i} [k(f; y)]^{-1} dy$.

---

[1]) *Kurventheorie*, Leipzig-Berlin 1933, p. 96.

Let $0=c_0<c_1<c_2...<c_s=1$ be a sequence containing all the points a_i, b_i for $i=1,2,...,r$ and let k_j be the number of indices i for which $[c_j, c_{j+1}]\subset[a_i, b_i]$. It follows that

$$\sum_{i=1}^{r}\delta[g(F_i)]=\sum_{j=0}^{s-1}k_j\cdot\int_{c_j}^{c_{j+1}}[k(f;y)]^{-1}dy. \tag{2}$$

The set $F_{i_1}\cdot F_{i_2}$ being finite for $i_1 \neq i_2$, we see that $k_j\leqslant k(f;y)$ for all, except a finite number of points $y\epsilon[c_j, c_{j+1}]$. Hence $k_j\cdot\int_{c_j}^{c_{j+1}}[k(f;y)]^{-1}dy\leqslant$ $\leqslant c_{j+1}-c_j$, which implies (e_2) because of (2).

Construction of $\mathfrak{X}'$. Let: $R_1, R_2, ...$ be a sequence of open sets forming a base for $\mathfrak{X}$; (X_0^1, X_1^1), (X_0^2, X_1^2), ... a sequence of all the couples $X_0^l=\overline{R}_{k_l}$, $X_1^l=\mathfrak{X}-R_{m_l}$ such that $X_0^l\cdot X_1^l=0$; g^l a function corresponding to (X_0^l, X_1^l) according to (E).

For each $x\epsilon\mathfrak{X}$ let $x'=[g^1(x), g^2(x), ...]$ be the corresponding point in the Hilbert cube $I^{\aleph_0}$ [1]).

The set $\mathfrak{X}'\subset I^{\aleph_0}$ so defined is clearly a continuous image of $\mathfrak{X}$. For $x_0 \neq x_1$ there is always an index n such that $x_0\epsilon X_0^n$, $x_1=X_1^n$. Therefore by (e_1): $g^n(x_0)=0$, $g^n(x_1)>0$, which implies $x_0' \neq x_1'$. It follows that $\mathfrak{X}'$ is a homeomorphic image of $\mathfrak{X}$. The distance in $\mathfrak{X}'$ being defined by the formula $|x_0'-x_1'|=\sum_{n=1}^{\infty}|g^n(x_0)-g^n(x_1)\cdot 2^{-n}$ it follows from (e_2) that for each regular decomposition (1) we hawe $\sum_{i=1}^{r}\delta(F_i')\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sum_{i=1}^{r}\delta[g^n(F_i)]\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=1$. Applying (C) we deduce $L^{(1)}(\mathfrak{X}')\leqslant 1$.

18.XI.1938. **Kołodziejczyk S.** *Compte rendu du séjour à Edinbourg.*

2.XII.1938. **Waraszkiewicz Z.** *Les groupes continus abeliens et compacts.*

L'auteur démontre qu'il y a une équivalence entre la notion de presque-périodicité de H. Bohr et celle de groupes continus abeliens et compacts. Cette équivalence repose sur les deux théorèmes suivants:

1. *Y_f désignant l'image de Bochner d'une fonction presque-périodique* (cf. 7. X. 1938, p. 250), *la fermeture $\overline{Y}_f$ peut être considérée comme un groupe continu et abelien.*

2. *A chaque groupe continu abelien et compact $\mathfrak{G}$ on peut faire correspondre (et d'une infinité de manières) une fonction presque-periodique $f(x)$ telle que $\overline{Y}_f$, considérée comme un groupe, soit isomorphe à $\mathfrak{G}$.*

---

[1]) Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem. **3** (1933), p. 79.

Ainsi, on obtient une géométrisation du phénomène de la presque-périodicité de la Théorie des fonctions. En poursuivant cette idée dans un champ plus vaste, on obtient une classe de fonctions de variable complexe liée avec les groupes continus non-abeliens, les éléments de cette classe présentant une généralisation des fonctions automorphes.

2.XII.1938. Kołodziejczyk S. *Compte rendu du séjour en Italie.*

SECTION DE WILNO

28.XI.1938. Kempisty S. *Sur l'aire des surfaces continues* [à paraître dans les Fundam. Math. 32].

Soit S la surface définie par les fonctions:

$$x=x(u,v), \qquad y=y(u,v), \qquad z=z(u,v),$$

continues dans un carré Q et y admettant presque partout des dérivées partielles. Supposons finie la limite supérieure des aires des polyèdres inscrits dans S, obtenus en divisant Q en triangles rectangles semi-réguliers. La dérivée de l'aire lebesguien de cette surface est presque partout égale à

$$\left\{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{1}$$

Si l'aire d'une face d'un polyèdre inscrit dans S est une fonction absolument continue de rectangle, l'aire de S est égale à l'intégrale lebesguienne de (1).

CHRONIQUE ET PUBLICATIONS

MATHÉMATICIENS POLONAIS A L'ÉTRANGER

Les membres suivants de la Société ont pris part à la *Réunion d'Etudes sur les Fondements et la Méthode dans les Sciences Mathématiques* (organisée par l'Institut International de Coopération Intellectuelle) à Zürich de 6. XII. à 9. XII. 1938:

Prof. Dr Łukasiewicz J. (Varsovie), Conférence intitulée: *Die Logik und das Grundlagenproblem.*

Prof. Dr Mazurkiewicz S. (Varsovie).

Prof. Dr Sierpiński W. (Varsovie). Conférence intitulée: *L'axiome du choix et l'hypothèse du continu.*

Il est en outre à signaler le séjour à l'étranger, dans les buts scientifiques, de MM.: Prof. Dr Biernacki M., Dr Kozakiewicz W., Prof. Dr Krygowski Z. et Doc. Dr Marcinkiewicz J. à Paris, Dr Kac M. à Baltimore, Dr Seipelt Lidia à Berlin et Mgr Wrona W. à Amsterdam.

MATHÉMATICIENS ÉTRANGERS EN POLOGNE

Georgieff G. (Sofia) à Varsovie. Communications à la Section de Varsovie, séance du 28. X. 1938, p. 251.

Dr Offord A. C. (Cambridge) à Wilno.

LIVRES ET PÉRIODIQUES PARUS

Acta Arithmetica 3_1 (Warszawa 1938, Séminaire Mathématique de l'Université Libre de Pologne, p. 131). Contient 8 travaux de 6 auteurs.

Fundamenta Mathematicae 31 (Warszawa 1938, Seminarium Matematyczne, Oczki 3, p. IV+320). Contient 30 travaux de 26 auteurs.

Opuscula Mathematica 2 (Kraków 1938, Institut de Mathématiques de l'Ecole des Mines à Cracovie, p. 15). Contient 5 travaux de 2 auteurs.

Prace Matematyczno-Fizyczne 46 (Warszawa 1939, Société des Sc. et des Lettres de Varsovie, p. VI+358). Contient 13 travaux de 14 auteurs.

Wiadomości Matematyczne 45 (Warszawa 1938, p. IV+137). Contient 7 travaux de 7 auteurs.

Wiadomości Matematyczne 46 (Warszawa 1939, p. IV+160). Contient 7 travaux de 7 auteurs.

Bulletin du Groupe Polonais adherent du Comité de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences. Année 1937 (*Wiadomości Matematyczne*, Supplément au volume 44, Warszawa 1938, p. II+178). Contient 8 travaux de 4 auteurs.

Bulletin du Groupe Polonais adherent du Comité de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences. Année 1938 (*Wiadomości Matematyczne*, Supplément au volume 45, Warszawa 1939, p. IV+158). Contient 3 travaux de 2 auteurs.

Bulletin du Groupe Polonais adherent du Comité de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences. Année 1938 (*Wiadomości Matematyczne*, Supplément au volume 46, Warszawa 1939, p. II+138). Contient 3 travaux de 2 auteurs.

Doc. Dr Saks S. et Prof. Dr Zygmund A. *Funkcje Analityczne* (Monografie Matematyczne 10, Warszawa-Lwów-Wilno 1938, p. VI+431), en polonais.

Prof. Dr Plamitzer A. *Geometria Rzutowa Układów Płaskich i Powierzchni Stopnia Drugiego* (Warszawa 1938, Komitet Wydawniczy Podręczników Akademickich, p. XVI+224), en polonais.

Prof. Dr Weigel K. *Geodezja (Miernictwo)* (Warszawa 1938, Komitet Wydawniczy Podręczników Akademickich, p. XI++468), en polonais.

Prof. Żyliński E. *Geometria Analityczna* (Warszawa 1938, Komitet Wydawniczy Podręczników Akademickich, p. XI+386), en polonais.

Prof. Dr Borsuk K. *Ćwiczenia z Analizy Matematycznej* (Komisja Wydawnicza Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów U. J. P., Warszawa 1938, p. VII+174), lithographié, en polonais.

ANALYSES

S. Saks. *Theory of the Integral* (Second Revised Edition), English translation by L. C. Young, with two additional Notes by S. Banach, Monografie Matematyczne 7. Warszawa-Lwów 1937, p. VII+347.

La première édition de ce livre a paru en français en 1933 (comme le volume 2 de la même collection) et a été vite épuisée. La nouvelle édition en diffère notablement par l'ensemble des matières traitées et par leur disposition. Il y est tenu compte d'un grand nombre de résultats intéressants et importants obtenus au cours des dernières années, et c'est la théorie de la mesure et de l'intégrale dans l'espace abstrait — et non pas dans l'espace euclidien (comme dans la première édition) — qui est choisie pour le point de départ de l'exposé. Cette disposition exige peut-être un peu plus d'effort de la part du débutant, mais présente plusieurs avantages: elle permet de traiter dans une même conception, non seulement la théorie classique de Lebesgue, mais aussi d'autres théories analogues, ayant une grande importance dans différentes branches de l'Analyse (p. ex. la théorie de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes, de l'intégration dans certains espaces à infinité de dimensions, de la longueur des ensembles, etc.). C'est aussi grâce à cette disposition que le volume a augmenté de peu, bien que l'ensemble des questions qui y sont étudiées a subi un agrandissement considérable.

Voici le résumé des matières traitées.

Dans le Chapitre I, l'auteur introduit la notion de mesure comme fonction d'ensemble non négative et complètement additive; au moyen de cette notion, il obtient (suivant le connu procédé de Lebesgue) la définition de l'intégrale dans l'espace abstrait. Bien que les hypothèses admises sur l'espace en question soient d'une grande généralité, l'intégrale

conserve la majorité des propriétés connues. Ainsi, on retrouve p. ex. le th. sur le changement de la variable (plus précisément, le th. sur le changement de la mesure) sous le signe d'intégration, le th. de Fatou sur l'intégration des suites de fonctions, le th. sur l'équivalence de la notion d'intégrale indéfinie et de fonction d'ensemble absolument continue (Radon-Nikodym). Même le th. fondamental de Fubini sur les intégrales multiples y est étendu aux espaces abstraits.

Le Chapitre II est consacré à la théorie de la mesure de Carathéodory dans l'espace métrique. Nous retrouvons ici, entre autres, la démonstration de la mesurabilité des ensembles de Borel et des ensembles A de Souslin.

Dans le Chapitre III, l'auteur se borne principalement à l'espace euclidien à m dimensions R_m. En se basant sur les chapitres précédents, l'auteur y développe d'une façon détaillée la théorie de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Dans le cas $m=1$, nous trouvons aussi le second théorème de la moyenne, ainsi que le théorème sur l'intégration par parties. Notons aussi la généralisation d'un curieux critère de Plessner, qui permet de distinguer les fonctions absolument continues parmi les fonctions à variation bornée.

Le Chapitre IV est consacré aux questions concernant la théorie de la différentiation des fonctions additives d'ensemble. On y trouve p. ex. le th. de Lebesgue sur la différentiation des fonctions à variation bornée, le th. de Fubini sur la différentiation des suites de fonctions, le th. de de la Vallée Poussin sur la décomposition des fonctions à variation bornée, quelques théorèmes intéressants de Ward sur la différentiation des fonctions d'intervalle et enfin la démonstration du th. suivant: *si la fonction* $|f|(\log^+|f|)^{m-1}$ *est intégrable dans* R_m, *l'intégrale de la fonction* f *admet presque partout une dérivée forte, égale à* f. En outre, on y trouve certains théorèmes sur la différentiation dans les espaces abstraits avec des applications à la théorie de l'intégrale dans le cube à infinité de dimension (Jessen).

Le Chapitre V contient l'exposé de la notion d'aire d'une surface $z=F(x,y)$, basé sur la notion d'intégrale de Burkill et sur celles introduites auparavant. Nous y trouvons les théorèmes de de Geöcze, de Radó et le th. fondamental de Tonelli sur la représentation de l'aire par l'intégrale

$$\int\int\left[1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}dx\,dy.$$

Le Chapitre VI est consacré à la théorie de l'intégrale de Perron, basée sur la notion de fonctions majorantes et minorantes, et de l'intégrale de Perron-Stieltjes. Comme application, l'auteur y donne la démonstration du profond th. de Looman-Menchoff: *$u(x,y)$ et $v(x,y)$ étant des fonctions continues des variables x et y, si l'on a en tout point $u_x=v_y$ et $u_x=-v_y$, la fonction $u+iv$ est holomorphe.*

Dans le Chapitre VII, l'auteur étudie en détails la notion de fonction à variation bornée généralisée (au sens étroit et au sens large) et démontre des théorèmes sur la différentiation de ces fonctions (Denjoy, Lusin, Khintchine).

Ces résultats trouvent leur applications dans le Chapitre VIII, où sont exposées les théories constructive et descriptive des deux intégrales de Denjoy (au sens étroit et au sens large) et où l'on trouve aussi le th. de Looman-Alexandroff sur l'équivalence de l'intégrale de Perron à celle de Denjoy au sens étroit.

Le Chapitre IX, qui est consacré à la théorie de la différentiation des fonctions le plus générales d'une et de deux variables, traite des plusieurs questions différentes. On y trouve d'abord la démonstration de très beaux (et récents) théorèmes sur le contingent des ensembles de points; ce sont des généralisations essentielles des théorèmes concernant les tangentes aux courbes et aux surfaces. Comme application, l'auteur en déduit le th. fondamental de Denjoy sur les nombres dérivés. On y trouve aussi des théorèmes sur la différentiation par rapport à une fonction arbitraire, une intéressante condition nécessaire et suffisante de Banach pour qu'une fonction d'une variable soit à variation bornée; une discussion de la signification de la condition N de Lusin pour la théorie de l'intégration, les théorèmes sur la superposition des fonctions absolument continues, le th. de Khintchine sur la différentiation approximative, et enfin les théorèmes sur la différentielle totale (ordinaire et approximative) des fonctions de deux variables.

L'Annexe contient deux notes de Banach (sur la mesure de Haar et sur l'intégrale de Lebesgue dans les espaces abstraits).

Le volume se termine par une Bibliographie très détaillée.

A côté de la richesse du contenu, le livre se distingue par l'exposition très soigneuse au point de vue didactique. Mais sa valeur réside avant tout dans l'originalité non seulement en ce qui concerne les sujets qui ont trouvé pour la première fois leur exposé méthodique dans ce livre, mais aussi dans le façon de traiter les résultats connus depuis longtemps: partout l'auteur apporte quelque chose de très beau et très personnel. Le lecteur qui connait par ailleurs le sujet du livre, s'en aperçoit aussitôt, surtout en lisant les démonstrations dont beaucoup sont tout à fait nouvelles.

Le livre de M. Saks est un manuel excellent pour ceux qui désirent étudier d'une façon plus approfondie la théorie métrique des fonctions de variable réelle. *A. Zygmund.*

S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Wykłady uniwersyteckie (*Fonctions analytiques*, Cours universitaire), Monografie Matematyczne 10, Warszawa—Lwów—Wilno 1938, p. VIII+432, en polonais.

Ce cours de la Théorie des Fonctions Analytiques s'éloigne de considérablement de la méthode traditionnelle, où l'on s'appuyait sur les éléments topologiques sans les exposer toutefois avec une précision nécessaire, ou bien, on suivait Weierstrass, n'employant que des moyens purement analytiques. La première de ces méthodes cause souvent des ennuis aux lecteurs (surtout aux débutants), tandis que la seconde dissimule parfois le vrai sens intuitif des raisonnements.

Les auteurs ont choisi une autre voie: „sans renoncer à l'application de l'appareil de la Géométrie et de la Théorie des Ensembles, ils ont cependant cherché de le limiter de façon qu'il puisse être établi et précisé sans causer de difficultés au débutant“ (Préface, p. IV).

Cette idée principale des auteurs a eu pour effet l'ordre de la filiation des théorèmes assez différent de celui qu'on rencontre d'habitude. Ainsi p. ex. le théorème de Cauchy sur l'intégrale le long d'un contour n'est prouvé d'abord que pour les rectangles (Ch. II) et généralisé plus tard (Ch. IV), après la démonstration du théorème de Runge.

Il y a d'autres points du cours où les auteurs abandonnent fort heureusement les méthodes traditionnelles: p. ex. les éléments analytiques y sont définis comme les fonctions méromorphes (et non pas comme des séries entières); grâce à cela il ne faut plus ajouter les pôles.

Les théorèmes, énoncés toujours très rigoureusement, sont accompagnés d'une caractérisation de leur rôle dans la théorie; les démonstrations détaillées sont souvent précédées par des explications importantes concernant leur idée directrice (comme p. ex. le théorème de Runge, p. 166, le théorème de Riemann, p. 222). C'est ainsi que les auteurs ont réussi d'associer à la valeur scientifique de leur exposé, de grandes valeurs intuitives.

L'appareil auxiliaire de la Théorie des Ensembles est succintement exposé dans une Introduction de 42 pages. Beaucoup de lecteurs s'en serviront simplement comme d'une énumération explicite — et très commode — des notions et des théorèmes topologiques qui interviennent dans la suite.

Le livre contient près de 400 exercices. Il y a parmi eux des exemples et des théorèmes classiques (le théorème de Gauss sur les racines de la dérivée d'un polynôme, le théorème de Hadamard-Ostrowski sur les séries lacunaires, etc.) ainsi que des résultats plus récents (le théorème de Morera-Carleman, un théorème de Mazurkiewicz sur le domaine d'une fonction holomorphe etc.).

Les auteurs y donnent aussi de nombreuses indications concernant les problèmes moins élémentaires dont ils ne purent pas tenir compte dans le texte (p. ex. le théorème de l'uniformisation, certaines questions concernant la représentation conforme, l'hypothèse de Riemann sur les racines de la fonction $\zeta(s)$ etc.); ces indications peuvent être utiles au lecteur comme point de départ pour ses études ultérieures.

Parmi les principaux sujets traités dans le cours, il se trouvent des questions qui, d'habitude, ne sont pas mentionnées dans les manuels (p. ex. la définition analytique de la connexité multiple, etc.) et qui sont exposées d'une façon tout-à-fait originale.

Voici un bref resumé du livre.

Introduction: *Théorie des Ensembles.* Ensembles. Espaces topologiques. Le plan ouvert (le plan au sens ordinaire) et le plan de Gauss (le plan comprenant le point à l'infini), les deux traités comme des espaces topologiques. Tous les théorèmes sur les domaines, les réseaux et les courbes qui seront appliqués dans la suite.

Ch. I. *Fonctions d'une variable complexe.* Continuité, convergence uniforme et régulière, Familles normales. Dérivée et différentielle totale. Fonctions élémentaires. Les branches du logarithme et de la puissance d'une fonction. L'angle et les transformations qui conservent les angles. Intégrale curviligne.

Ch. II. *Fonctions holomorphes.* Relations entre la fonction primitive et l'intégrale le long d'une courbe. Théorème et formule de Cauchy (pour un rectangle et pour un système de rectangles). Théorèmes de Liouville, Weierstrass, Stieltjes-Osgood et Morera. „Spiegelungsprinzip" de Schwarz.

Ch. III. *Fonctions méromorphes.* Les séries de Taylor et de MacLaurin. Théorème d'Abel. Points singuliers. Théorème de Casorati-Weierstrass. Fonctions méromorphes et rationnelles. Résidus. Théorèmes de Rouché et de Hurwitz. Différentes propriétés des fonctions méromorphes et des transformations qu'elles effectuent. Définitions et théorèmes préparatifs sur les fonctions de deux variables.

Ch. IV. *Méthodes géométriques élémentaires de la théorie des fonctions.* Théorème de Runge (traité d'une façon très claire et précise; en particulier la discussion détaillée de la translation des pôles). Théorème de Cauchy pour les domaines simplement connexes. Formule de Jensen-Nevanlinna. Accroissement du logarithme le long d'une courbe. Index d'un point par rapport à une courbe. Méthode des résidus. Fonctions de deux variables. Applications topologiques: théorème de Jordan pour polygones, définition analytique de la connexité multiple.

Ch. V. *Représentation conforme.* Transformations homographiques et conformes. Facteurs de Blaschke. Lemme de Schwarz. Théorème de Riemann (avec la démonstration d'après Carathéodory-Fejér-Riesz). „Verzerrungssatz" de Koebe et théorème de Radó. Formules de Schwarz-Christoffel.

Ch. VI. *Fonctions analytiques.* Element analytique, prolongement analytique, fonction analytique et ses points critiques. Théorèmes sur l'inversion d'une fonction analytique, sur la monodromie, de Poincaré-Volterra, sur les fonctions algébriques. Notion de surface de Riemann.

Ch. VII. *Fonctions entières. Fonctions méromorphes dans tout le plan ouvert.* Théorèmes classiques sur la représentation des fonctions (de Weierstrass et Mittag-Leffler, méthode de Cauchy) avec de nombreux exemples. Théorème sur l'ordre d'une fonction entière (Borel, Hadamard). Théorèmes de Picard, Schottky, Montel, Landau. Directions de Julia.

Ch. VIII. *Fonctions elliptiques.* Définitions et théorèmes sur les fonctions périodiques et elliptiques. Fonctions spéciales: $\wp$, ζ, σ, fonction modulaire, et leurs applications (représentations des fonctions elliptiques). Intégrales elliptiques.

Ch. IX. *Fonctions $\Gamma(s)$ et $\zeta(s)$. Séries de Dirichlet.* Propriétés fondamentales des fonctions $\Gamma(s)$, $B(p,q)$ (formules de Legendre, Hankel, Stirling) et $\zeta(s)$ (l'équation fonctionnelle, les racines). Séries de Dirichlet: convergence dans le demi-plan, représentation des fonctions holomorphes dans le demi-plan par les séries de Dirichlet, etc.

Le livre de MM. Saks et Zygmund constitue un véritable progrès dans la littérature de la Théorie des Fonctions, tant grâce à sa méthode qu'à sa forme. Il est à souhaiter que cet excellent Cours, tout-à-fait moderne, soit traduit en une des langues „internationales".

Z. Charzyński et E. Szpilrajn.

Eustachy Żyliński, *Geometria Analityczna*. Komitet Wydawniczy Podręczników Akademickich przy Ministerstwie Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Warszawa 1938, p. XI+386, en polonais.

C'est un précis de la géométrie analytique, adapté à peu près aux programmes des premières années d'études aux universités polonaises. L'auteur ne considère (sauf dans une annexe à la fin du livre) que les espaces euclidiens et projectifs réels de dimension ≤ 3 (le cas du plan et celui de l'espace à trois dimensions étant traités simultanément). Il se borne à la géométrie analytique élémentaire, en évitant méthodiquement tout raisonnement basé sur la notion de limite ou de continuité. Ce soin d'être compris par le débutant ne l'empêche pas d'approfondir le sujet traité.

L'ouvrage se compose d'une Introduction (contenant les notions les plus élémentaires de la théorie des vecteurs), de 15 Chapitres et de 6 Annexes. Dans le Chapitre I, l'auteur introduit les coordonnées (avant tout cartésiennes rectangulaires et obliques) de points et de vecteurs, avec les formules concernant leurs transformations. Après quelques considérations générales et tout à fait élémentaires, qui concernent la notion d'équation de figure géométrique et qui occupent le Chapitre II, l'auteur passe, dans le Chapitre III, à l'exposé méthodique de la théorie des droites et des plans. Les propriétés de la circonférence et de la sphère constituent le sujet du Chapitre IV. Le Chapitre V contient une introduction synthétique à la théorie des côniques et la détermination de leurs équations dans les coordonnées polaires et cartésiennes. Dans le Chapitre VI, on trouve une classification exacte des courbes du second degré. L'auteur y utilise la théorie des matrices et des formes quadratiques, dont l'exposé plus détaillé se trouve dans les annexes. L'étude sommaire des côniques constitue le Chapitre VII et les propriétés spéciales de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole forment le sujet du Chapitre VIII. Le Chapitre IX contient la classification des surfaces du second degré. Les résultats en sont recueillis en une table. Les Chapitres X et XI contiennent l'étude sommaire des quadriques et des propriétés spéciales des cônes, cylindres, ellipsoides, hyperboloïdes et paraboloïdes. Toutes ces récherches concernent le plan ou l'espace euclidien sans points dans l'infini. Ces derniers points sont introduits dans le Chapitre XII, qui contient en outre la théorie des coordonnées homogènes et une introduction aux notions de la géométrie projective (faisceaux de droites et de plans, théorème de Desargues, côniques dans le plan projectif etc.). Le rapport anharmonique et ses applications (p. ex. à la théorie des polaires) constituent le sujet du Chapitre XIII. L'étude des propriétés du plan projectif est complétée par le Chapitre XIV. On

y trouve la définition des coordonnées projectives et leurs application à la théorie des côniques, les théorèmes de Pascal et de Brianchon et le principe de dualité. Enfin, le Chapitre XV constitue une introduction à la théorie des transformations géométriques. En commençant par la définition des transformations biunivoques générales d'un ensemble, l'auteur s' y occupe successivement des transformations projectives, affines, homothétiques et isométriques de la droite et du plan projectifs. Il détermine les invariants caractéristiques de ces transformations, ce qui lui permet de faire connaître au lecteur la classification moderne des géométries comme des théories des invariants de certaines classes de transformations (le célèbre „*Programme d'Erlangen*" de F. Klein).

Les cinq premières Annexes contiennent les notions et les théorèmes de l'algèbre, qui sont indispensables pour la lecture du texte. Dans la première de ces annexes, l'auteur donne quelques notions sur les matrices, dans la deuxième — la théorie des déterminants, la troisième est consacrée à la théorie des équations linéaires, la quatrième à quelques propriétés des matrices orthogonales et symétriques, et la cinquième traite des formes quadratiques et des polynômes du second degré. Enfin, la sixième annexe contient une courte introduction à la théorie des espaces euclidiens complexes et à la géométrie des espaces euclidiens à un nombre arbitraire de dimensions. *K. Borsuk.*

H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots* (G. E. Stechert & Co., New York 1938). 136 pages; 180 figures, anaglyphes et cartes colorées dans le texte; 4 modèles, 1 jeu de 32 cartes avec 4 desseins animés et 1 paire de lunettes rouges-vertes hors texte.

H. Steinhaus, *Kalejdoskop Matematyczny* (Książnica Atlas, Lwów-Warszawa 1938). Edition jumelle à texte polonais.

Opuscule destiné pour des laïques, remarquable par sa méthode de vulgarisation scientifique et sa technique de publication. L'auteur procède par un choix très recherché des véritables curiosités mathématiques et par des moyens parfois nouveaux et ingénieux de les étaler, toutes matérialisées, devant le lecteur. Tel est p. ex. le modèle du dodécaèdre régulier en deux pièces de carton: sorti de sa pochette, faite dans la reliure du livre, il se redresse par la contraction d'un élastic circulaire qui tend automatiquement à en occuper l'équateur.

Ayant frappé l'imagination du lecteur, l'auteur éveille ses facultés de déduction par des textes très brefs et rigoureux qui expliquent les illustrations: souvent ils contiennent en germe les réponses aux questions qui peuvent surgir dans l'esprit du lecteur intelligent.

Parmi les matières choisies, pour la plupart bien connues des mathématiciens, on trouve quelque fait très récent ou même nouveau. Elles relèvent de la théorie des nombres et de l'algèbre (nombres de Fibonacci, triangle de Pascal, problèmes combinatoires, jeux, réseaux, parquetages,

en particulier l'élégante application du nid d'abeille au système électoral proportionnel), des géométries euclidienne, analytique et projective (décompositions du triangle et du carré, échelle logarithmique, le longimètre de Steinhaus, les côniques, polyèdres réguliers, perspective, théorème de Pohlke etc.), de la topologie (les ponts de Königsberg, le problème des 4 couleurs, la construction d'une courbe péanienne remplissant le carré d'après Sierpiński, surfaces unilatérales, surfaces bilatérales à bord faisant noeud, enlacements), du calcul des variations (problème de Plateau), de la mécanique rationnelle (théorème de Copernic sur le cercle roulant dans un autre de rayon double, chute sur une cycloïde, flotteurs équilibrés d'Auerbach etc.), des probabilités (loi de Gauss) et des applications (nomographie, harmonie musicale, crystallographie, statistique etc.). Les remarques finales renseignent le lecteur sur l'origine ou les sources bibliographiques des sujets traités. *B. Knaster.*

Table des matières

du t. XVII

Les publications de la Société Polonaise de Mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de »*Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego*« en un volume comprenant aussi bien des mémoires de langue polonaise que des mémoires rédigés en d'autres langues. Depuis 1922, l'organe de la Société porte le titre d'**Annales de la Société Polonaise de Mathématique**; les travaux de langue polonaise paraissent dans un Supplément *(Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego)*, le corps du volume étant réservé aux travaux de langues française, anglaise, italienne et allemande.

Les tomes I — XVII contiennent 162 mémoires et notes des 64 auteurs suivants:

Abramowicz K., Auerbach H., Bielecki A., Biernacki M., Bilimowitch A., Borsuk K., Bouligand G., Cartan E., Chwistek L., Cotton E., Delsarte J., Durañona y Vedia A., Flamant P., Fréchet M., Gambier B., Garcia G., Giraud G., Glass S., Godeaux L., Gołąb S., Hadamard J., Hildebrandt T., Hlavatý V., Hoborski A., Janet M., Kempisty S., Kobrzyński Z., Kołodziejczyk S., Kozakiewicz W., Labrousse A., Lainé E., Leja F., Lichtenstein L., Marcinkiewicz J., Montel P., Nikliborc L., Nikodym O., Perausówna I., Popovici C., Rosenblatt A., Le Roux J., Rudnicki J., Ruziewicz S., Sakellariou N., Saks S., Severi F., Sieczka F., Sierpiński W., Ślebodziński W., Stamm E., Stożek W., Tonolo A., Tsortsis A., Turowicz A., Turski S., Urbański W., Vasseur M., Vitali G., Wajnsztejn D., Ważewski T., von Weyssenhoff J., Wilkosz W., Zaremba S., Zaremba S. K.

Le prix de chaque volume est de 12 złotys excepté quelques tomes dont le prix est plus bas, celui d'un Supplément est de 3 złotys.

La collection contenant les tomes II—XVI est en vente au pris de 150 złotys (le tome I est épuisé, mais il sera réimprimé). — Les payments peuvent être effectués par chèque de la Caisse d'épargne postale polonaise: **P. K. O.** au compte de: **Polskie Tow. Matematyczne, Kraków, Nr. 406-852**, ou par mandat international à l'adresse:

Administration des Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique
Kraków (Pologne), ul. Gołębia 20.

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVII

ANNÉE 1938, FASCICULE II

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA, CRACOVIE, RUE ŻYTNIA, 6.
SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION: FRANÇOIS LEJA, CRACOVIE, PL. JABŁONOWSKICH 3

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW 1939
INSTYTUT MATEMATYCZNY U. J., UL. GOŁĘBIA 20

Avis

Depuis l'année 1938, chaque tome des Annales de la Société Polon. de Mathématique paraît en deux fascicules correspondants aux semestres de l'année.

La Société offre gratuitement 100 tirages à part aux auteurs des Annales.

Les manuscrits doivent être envoyés à l'une des adresses:

S. Zaremba, Kraków (Pologne), ul. Żytnia 6,
F. Leja, Kraków (Pologne), pl. Jabłonowskich 3.

Pour ce qui concerne l'achat et l'échange de ces Annales s'adresser à:

l'Administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique
Kraków (Pologne), ul. Gołębia 20.

Table des matières

du t. XVII, fascicule II